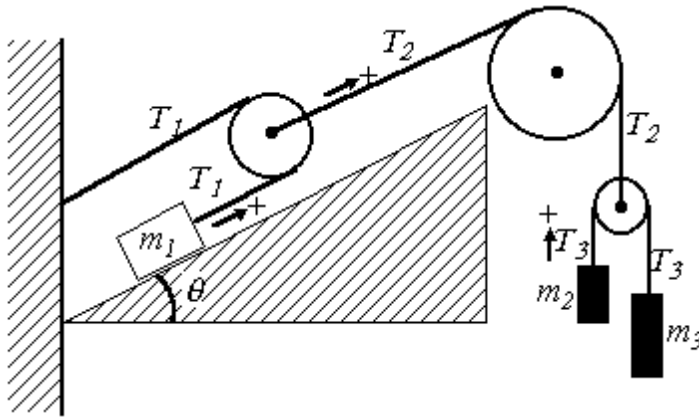


Mechanica deeltentamen 1 - 16 november 2001

1. Parachutespringster: $\beta = \frac{F}{Av^2} \Rightarrow [\beta] = \frac{[(MLT^{-2})]}{[(L^2)(LT^{-1})^2]} = ML^{-3}$
2. Hagelkorrel: $F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow mg = \frac{d(mv)}{dt}$ met $m = \beta t$ volgt $(\beta t)g = \frac{d((\beta t)v)}{dt}$ of $gt = \frac{d(tv)}{dt}$ dus $\int gt dt = \int d(tv)$ en $\frac{1}{2}gt^2 = tv$ dus $\frac{1}{2}gt = v$ en $a = \dot{v} = \frac{1}{2}g$
3. Met de spankrachten en tekens zoals in de figuur aangegeven:

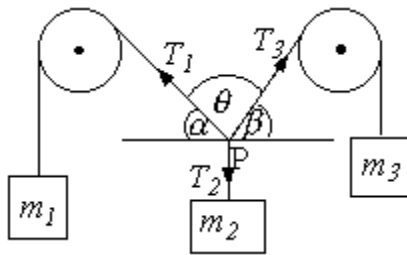


- a. De katrol waarover het touw met T_3 loopt, verplaatst in dit geval niet. Voor m_2 : $m_2 a = T_3 - m_2 g$. Voor m_3 : $m_3 a = m_3 g - T_3$ hieruit volgt: $a = \frac{m_3 - m_2}{m_3 + m_2} g$
 - b. Nu geldt:

$$\begin{aligned}
 m_1 a_1 &= T_1 - m_1 g \sin \theta & 2T_1 &= T_2 \\
 m_2 (a_3 - a_2) &= T_3 - m_2 g & 2T_3 &= T_2 \\
 m_3 (a_3 + a_2) &= m_3 g - T_3 & a_1 &= 2a_2
 \end{aligned}$$
 waaruit volgt: $a_2 = -\frac{1}{2}g \frac{m_1(m_2+m_3) \sin \theta - 2m_2 m_3}{m_3 m_1 + m_2 m_3 + m_2 m_1}$, $a_3 = -\frac{1}{2}g m_1 \frac{(m_2 - m_3) \sin \theta + 2(m_2 - m_3)}{m_3 m_1 + m_2 m_3 + m_2 m_1}$
 - c. Nu is $a_1 = 0$ waaruit volgt $a_2 = 0$ en we hebben zo weer dezelfde vergelijkingen (en oplossing) als in geval a. Alternatieve oplossing: "in dit geval beweegt de katrol met het touw T_3 met konstante snelheid en er verandert dus niets aan de bewegingsvergelijkingen uit a."
4. Mijnwerker:
 - a. $ma = -F_g + F_v \Rightarrow (80 \text{ kg})(-5 \text{ m s}^{-2}) = -(80 \text{ kg})(9.8 \text{ m s}^{-2}) + F_v$ dus $F_v = (80 \text{ kg})(4.8 \text{ m s}^{-2}) = 384.0 \text{ N}$ de weegschaal is echter geijkt in kilo dus hij geeft aan: $\frac{(80 \text{ kg})(4.8 \text{ m s}^{-2})}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = 39.184 \text{ kg}$
 - b. Binnen de aarde is $F_g(r) = G \frac{mM}{a^3} r$ op het oppervlak is $F_g(a) = G \frac{mM}{a^3} a = g$ dus $F_g(r) = g \frac{r}{a}$. We hebben zo $F_g(6380 \text{ km} - 638 \text{ km}) = 9.8 \text{ m s}^{-2} \frac{6380 \text{ km} - 638 \text{ km}}{6380 \text{ km}} = 8.82 \text{ m s}^{-2}$. We vinden zo $\frac{(80 \text{ kg})(8.82 \text{ m s}^{-2} - 5 \text{ m s}^{-2})}{9.8 \text{ m s}^{-2}} = 31.184 \text{ kg}$
 5. Massa aan veer:
 - a. $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

- b. $x(0) = -x_0$ en $\dot{x}(0) = 0$,0
- c. $x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} + \phi)$
- d. $E(t) = E_0 e^{-\frac{b}{m}t} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -\frac{b}{m} E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$ en verlies per periode is $\Delta E = -\frac{b}{m} E_0 e^{-\frac{b}{m}t} \frac{1}{\omega_1} = -\frac{b}{m} E_0 e^{-\frac{b}{m}t} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}}$ nu is $Q = \frac{E}{\Delta E} = \frac{E_0 e^{-\frac{b}{m}t}}{-\frac{b}{m} E_0 e^{-\frac{b}{m}t} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}}} = -\frac{b}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}} \simeq -\frac{b}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = -\frac{b}{m} \sqrt{\frac{m}{k}}$
- $\sqrt{\frac{mk}{b^2}}$ OF: $Q = \frac{\omega_1}{\gamma} \simeq \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{\sqrt{k/m}}{b/m} = \sqrt{\frac{mk}{b^2}}$
- e. Grotere $m \Rightarrow$ grotere Q ; kleinere wrijving $\Rightarrow$ grotere Q .

6. Wrijvingsloze wielen



Omdat er geen beweging is, zijn de spankrachten in P kennelijk in evenwicht. Er moet gelden: (i) de resultante van T_1 en T_3 heeft dezelfde grootte als T_2 en (ii) die resultante is vertikaal (omdat T_2 vertikaal is).

- a. uit (i) volgt $T_1^2 + T_3^2 = T_2^2$ dus $m_1^2 + m_3^2 = m_2^2$ (**)
- b. uit (ii) volgt dat de resultante geen horizontale component mag hebben dus $m_1 g \cos \alpha = m_3 g \cos \beta$ (*). Omdat $\theta = 90^\circ$ geldt dat $\sin \alpha = \cos \beta$ ofwel $\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \cos \beta$. Substitutie in (*) geeft: $m_1 \cos \alpha = m_3 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ dus $\cos \alpha = \frac{m_3}{\sqrt{m_1^2 + m_3^2}}$ (**) $\frac{m_3}{m_2}$ en $\gamma = 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \arccos \frac{m_3}{m_2}$ ($= 90^\circ + \arctan \frac{m_1}{m_3} = 90^\circ + \arcsin \frac{m_1}{m_2}$)

7. Race-auto: Merk op dat de hoekversnelling $\alpha = \frac{A}{R}$, en dat voor de cirkelbeweging α en ω beiden loodrecht staan op het vlak waarin de cirkelbaan ligt.

- a. $a_t(t) = \alpha R = A$ (dat komt doordat A precies in tangentiële richting is) en dus konstant.
- b. $a_r(t) = \omega^2 R = (\alpha t)^2 R = \frac{A^2}{R} t^2$
- c. De normaal kracht op de (hellende) baan is $N = F_z \cos \theta + F_r \sin \theta$ met F_r de radieële kracht.

Langs het vlak van de (hellende) baan geldt als hij juist uit de bocht vliegt $F_w^{\max} + F_z \sin \theta = F_r \cos \theta$ met $F_w^{\max} = \mu N$ dus

$\mu (F_z \cos \theta + F_r \sin \theta) + F_z \sin \theta = F_r \cos \theta$, dus als $F_r = -F_z \frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\mu \sin \theta - \cos \theta}$ met $F_r =$

ma_r volgt $ma_r = -mg \frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\mu \sin \theta - \cos \theta}$ en met b. $\frac{A^2}{R} t^2 = -g \frac{\mu \cos \theta + \sin \theta}{\mu \sin \theta - \cos \theta}$ dus $t = \sqrt{\frac{gR \sin \theta + \mu \cos \theta}{A^2 \cos \theta - \mu \sin \theta}}$

- d. $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = \frac{A}{R} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{R} + \left(\frac{A}{R} t\right)^2 \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{R})$
 $\mathbf{a} = A \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}} + \frac{A^2}{R} t^2 \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}})$ waarin $\hat{\mathbf{r}}$ nog van de tijd afhangt volgens $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t$ invullen geeft
 $\mathbf{a} = A \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t) + \frac{A^2}{R} t^2 \hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{z}} \times (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t))$

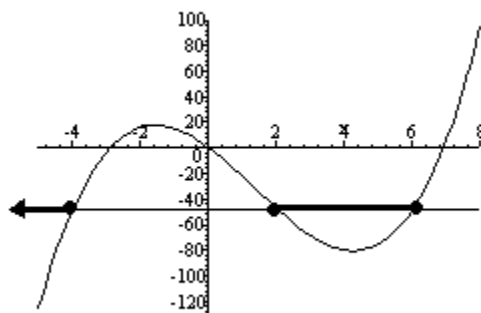
$$\mathbf{a} = A\hat{\mathbf{y}} \cos \omega t + A\hat{\mathbf{x}} \sin \omega t + \frac{A^2}{R} t^2 \hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \frac{A^2}{R} t^2 \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t \text{ dus } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A \sin \omega t + \frac{A^2}{R} t^2 \cos \omega t \\ A \cos \omega t + \frac{A^2}{R} t^2 \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Potentiaal:

a. $F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = (-3x^2 + 8x + 20) \text{ N}$

b. De arbeid die de kracht verricht is $W = \int_0^2 F(x) dx = -(U(2) - U(0)) = -(-48.0 \text{ J} - 0 \text{ J}) = 48.0 \text{ J}$. Extern moet je dus -48.0 J toevoeren: er komt arbeid (energie) vrij.

c. m kan zich bevinden daar waar de lijn $y = -48$ vet is getekend. In de snijpunten met de curve staat de massa stil daartussen wordt de kinetische energie steeds groter.



d. $K = E - U = -48 \text{ J} - (x^3 - 4x^2 - 20x) \text{ J}$ (alleen geldig mits positief).

e. In het algemeen is het externe vermogen: $P = -Fv = -(-3x^2 + 8x + 20) Nv$ met $t = 0$ op $x = 0$ geldt $x = vt$ dus $P = -(-3(vt)^2 + 8(vt) + 20) v \text{ N} = (3v^3t^2 - 8v^2t - 20v) \text{ N}$