

Tweede deeltentamen Kansrekening 2

31 mei 2012, 8.45-10.45

- Dit tentamen bestaat uit zes opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan, dit mag geen grafische of programmeerbare rekenmachine zijn
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{y}e^{-3y} & \text{als } 0 < x < y, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [2 punten] Laat zien dat Y exponentieel verdeeld is met parameter 3.
(b) [3 punten] Laat zien dat $E(X|Y = y) = \frac{y}{2}$ (voor $y > 0$).
(c) [3 punten] Gebruik de vorige twee onderdelen om $E(X)$ te berekenen.

2. Laat X en Y onafhankelijke stochasten zijn met respectievelijke dichtheidsfuncties

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

en

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & \text{als } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) [4 punten] Bereken de dichtheid f_Z van de stochast $Z = X + Y$. Het is handig om bij het berekenen van $f_Z(z)$ onderscheid te maken tussen de situaties $z < 1$, $1 \leq z < 2$, $2 \leq z < 3$ en $z \geq 3$.
(b) [4 punten] Bereken de momentvoortbrengende functie van de stochast $V := 3X + 2$.

3. [4 punten] Bij een college waaraan door 50 studenten deelgenomen wordt, moeten de studenten verplicht een essay schrijven. Het onderwerp van dit essay moet gekozen worden uit een lijst van 30 onderwerpen. Neem aan dat iedere student onafhankelijk van de andere studenten een volstrekt willekeurig onderwerp van de lijst kiest om zijn of haar essay over te schrijven. Laat W het aantal onderwerpen van de lijst zijn dat door meer dan één student gekozen wordt. Bereken de verwachting van W .

4. [4 punten] Laat X en Y continue stochasten zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3x & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Bereken de covariantie tussen X en Y .

5. [4 punten] Laat X een stochast zijn met momentvoortbrengende functie

$$M_X(t) = \frac{4}{4 - t^2}, \text{ als } |t| < 2.$$

Bereken $\text{Var}(X)$.

6. Bij deze opgave heb je de bijlage nodig. Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke identiek verdeelde stochasten zijn met $E(X_i) = 5$ en $\text{Var}(X_i) = 9$.

(a) [4 punten] Gebruik de Centrale limietstelling om te berekenen hoe groot n gekozen moet worden om te zorgen dat

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \leq 4,9\right) \approx 0,025.$$

(b) [4 punten] De stochasten $Y_1, Y_2, \dots, Y_{100}$ zijn onafhankelijk en identiek verdeeld met $E(Y_i) = 4,9$ en $\text{Var}(Y_i) = 7$. Deze stochasten zijn ook onafhankelijk van de hierboven genoemde stochasten $X_1, X_2, \dots$. Geef met behulp van de Centrale limietstelling een benadering van

$$P\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_{100}}{100} > \frac{X_1 + \dots + X_{100}}{100}\right).$$

Bijlage: Cumulatieve distributiefunctie $\Phi(x)$ van de standaard normale verdeling

[illegible]

