

Eerste deeltentamen Kansrekening II voor Wiskunde

27 maart 2008, 8.45-10.45

- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven. Er zijn 36 punten te behalen. Het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Uit een vaas met vier ballen die genummerd zijn van 1 tot en met 4 trek ik twee keer een willekeurige bal, met teruglegging. Ik schrijf X voor het eerste nummer en Y voor het hoogste nummer dat ik heb getrokken.

(a) [3 punten] Laat zien dat $P(X = x, Y = y)$ voor alle relevante waarden van x en y gelijk is aan de waarden in de onderstaande tabel.

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	0	1/8	1/16	1/16
3	0	0	3/16	1/16
4	0	0	0	1/4

(b) [4 punten] Bereken $E(Y|X = x)$ voor alle relevante waarden van x .

2. Laat (X, Y) een discrete stochastische vector zijn met gezamenlijke kansmassafunctie

$$p_{(X,Y)}(x, y) = p^2(1 - p)^{(2x+y)}, \text{ voor } x = 0, 1, 2, \dots \text{ en } y = -x, -x + 1, \dots$$

hierbij is $0 < p < 1$ een parameter.

(a) [4 punten] Bereken $P(Y = y)$ voor $y = 0, 1, 2, \dots$

N.B. Ook voor negatieve gehele waarden van y geldt dat $P(Y = y) > 0$, maar deze kansen hoeft je niet uit te rekenen.

(b) [4 punten] Bereken de kansmassafunctie van de stochast $Z = X + Y$.

3. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie

$$f(x) = \begin{cases} c/x^5 & \text{als } x \geq 1, \\ 0 & \text{elders,} \end{cases}$$

hierbij is c een nog te berekenen constante.

- (a) [3 punten] Bereken de constante c .
- (b) [3 punten] Bereken de verwachting van X .
- (c) [4 punten] Bereken de dichtheidsfunctie van de stochast $Y = \ln X$, hierbij is $\ln X$ de natuurlijke logaritme van X . Hoe wordt de verdeling van Y genoemd?

4. Laat X een continue stochast zijn met dichtheidsfunctie f_X en neem aan dat voor $x < 0$ geldt dat $f_X(x) = 0$ (dat wil zeggen dat X een positieve continue stochast is).

- (a) [4 punten] Laat zien dat

$$E(X) = \int_0^\infty \int_x^\infty f_X(y) dy dx.$$

Hint: verwissel de integratievolgorde.

- (b) [3 punten] Gebruik het resultaat uit het vorige onderdeel om te laten zien dat

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x)) dx,$$

hierin is F_X de cumulatieve verdelingsfunctie van X .

- (c) [4 punten] Gebruik het vorige onderdeel om de verwachting uit te rekenen van de continue stochast Z met dichtheidsfunctie

$$f_Z(z) = \begin{cases} e^{-z+7} & \text{als } z \geq 7, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$