

Tweede deeltentamen Kansrekening II voor Wiskunde

30 mei 2007, 8.45-10.45

- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven en een bijlage. Er zijn 36 punten te behalen, het cijfer wordt gegeven door $(4 + \text{aantal punten})/4$.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden.
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan; je hoeft lastige breuken e.d. niet te vereenvoudigen.
- Na correctie liggen de tentamens ter inzage bij het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{als } 0 \leq x \leq 2 \text{ en } 0 \leq y \leq 2x - x^2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) (3 punten) Laat zien dat de dichtheidsfunctie van X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{als } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (b) (3 punten) Bereken de variantie van X .
(c) (3 punten) Zijn X en Y onafhankelijk?
(d) (4 punten) Bereken $P(Y > X)$.

2. Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-x-3-\frac{y}{x^2}} & \text{als } x \geq 3 \text{ en } y \geq 0, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) (3 punten) Laat zien dat de marginale dichtheid van de stochast X gegeven wordt door

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x+3} & \text{als } x \geq 3, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

- (b) (4 punten) Laat zien dat voor $x \geq 3$ geldt dat $E(Y|X = x) = x^2$.
(c) (4 punten) Gebruik het resultaat uit het vorige onderdeel om $E(Y)$ te berekenen.

3. (5 punten) Laat (X, Y) een continue stochastische vector zijn met gezamenlijke dichtheidsfunctie

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{als } 0 \leq x \leq y, \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

Laat (S, T) de continue stochastische vector die gedefinieerd wordt door $(S, T) = (X + 2Y, X)$. Bereken de gezamenlijke dichtheid $f_{(S,T)}$ van (S, T) en maak een schets van het gebied in het (s, t) -vlak waar geldt dat $f_{(S,T)}(s, t) > 0$.

4. Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke identiek verdeelde stochasten zijn met $E(X_i) = 0$ en $\text{var}(X_i) = \frac{1}{2}$.

(a) (3 punten) Gebruik de Centrale Limietstelling en de tabel in de bijlage om een benadering te geven van $P(X_1 + \dots + X_{50}) < 3$.

(b) (4 punten) Hoe groot moet n gekozen worden om te zorgen dat

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right| \leq \frac{1}{100}\right) \approx 0,95?$$

Gebruik weer de Centrale Limietstelling en de tabel uit de bijlage.

[illegible]