

2e deeltentamen Kansrekening II voor Wiskunde

31 mei 2006, 8.45-10.45

1. De stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots, X_{625}$ zijn onafhankelijk en gelijkverdeeld met dichtheid f gegeven door $f(x) = 3(1-x)^2$ voor $0 \leq x \leq 1$, en $f(x) = 0$ elders. Gebruik de centrale limietstelling om een schatting te geven van de kans

$$P(X_1 + \dots + X_{625} < 170).$$

Je mag de uitkomst geven in termen van de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling.

2. Voor elke $n = 1, 2, 3, \dots$ heeft de stochastische grootte X_n dichtheid f_n gegeven door $f_n(x) = 0$ voor $x < 1$, en

$$f_n(x) = \frac{n}{x^{n+1}}$$

voor $x \geq 1$. Laat zien dat als $n \rightarrow \infty$, X_n in verdeling convergeert naar een stochastische grootte die met kans 1 de waarde 1 aanneemt.

3. In de verzekeringswereld wordt de samenhang tussen een eerste schatting van een claim X en de uiteindelijke waarde Y ervan soms beschreven met de volgende gezamenlijke dichtheid:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)},$$

voor $x > 1$ en $y > 1$. Elders geldt dat $f_{(X,Y)}(x,y) = 0$.

(a) Laat zien dat dit inderdaad een dichtheid is. Het is daarbij handig om eerst over y te integreren.

(b) Zijn X en Y onafhankelijk?

(c) Bepaal de marginale verdeling van X en bepaal $f_{Y|X}(y|x)$.

(d) Bepaal $E(Y|X = x)$ voor alle relevante waarden van x .

4. De stochastische grootheden X en Y zijn onafhankelijk met dezelfde dichtheid f . Bovendien geldt dat $f(x) = 0$ voor alle $x < 0$.

(a) Leg uit waarom

$$P(XY \leq a) = \int_{x=0}^{\infty} f(x) \int_{y=0}^{a/x} f(y) dy dx.$$

(b) Laat vervolgens (m.b.v. de substitutie $u = xy$ in de binnenste integraal) zien dat de dubbele integraal in (a) gelijk is aan

$$\int_{u=0}^a \int_{x=0}^{\infty} f(x) \frac{1}{x} f\left(\frac{u}{x}\right) dx du.$$

Leg uit waarom dit betekent dat de dichtheid van XY in het punt u gelijk is aan

$$\int_{x=0}^{\infty} f(x) \frac{1}{x} f\left(\frac{u}{x}\right) dx.$$

(c) Bereken m.b.v. (b) de dichtheid van XY in het speciale geval waarin $f(x) = 0$ voor $x < 1$, en

$$f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}},$$

voor $x \geq 1$, met $\alpha > 0$. Denk hierbij om de grenzen van de integraal!