

Tentamen Kansrekening II W/Ect.

23 augustus 2005, 13.30-16.30

Dit tentamen bestaat uit vijf opgaven met in totaal twaalf onderdelen. Beide onderdelen van opgave 1 hebben gewicht 1, alle andere onderdelen hebben gewicht 2. Bij opgave 1 hoeft u alleen de antwoorden te geven; bij de andere opgaven moet u bovendien een beknopte en zorgvuldige redenering of berekening geven.

1. (a) Laat X en Y onafhankelijke, normaal verdeelde stochasten zijn: X met verwachting μ en variantie σ^2 ; Y met verwachting ν en variantie η^2 . Hoe is de stochast $X + 3Y$ verdeeld?

(b) Laat X en Y onafhankelijke, Poisson verdeelde stochasten zijn met parameter λ respectievelijk μ . Geef de verwachting van X . Hoe is de stochast $X + Y$ verdeeld?

2. Laat X en Y onafhankelijke, exponentieel verdeelde stochasten zijn met parameters λ respectievelijk μ . Laat zien (met berekening) dat

$$P(X > Y) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

3. Iemand doet 600 worpen met een dobbelsteen. De uitkomsten geven we aan met $X_1, X_2, \dots, X_{600}$.

(a) Laat $Y = X_1 + X_2$ en $Z = \max(X_1, X_2)$. We gebruiken de notatie $p(i, j)$ voor $P(Y = i, Z = j)$. Geef $p(5, 3)$, $p(12, 6)$ en $p(2, 1)$.

(b) Met de notatie van onderdeel (a), geef $P(Z = 3)$ en $P(Y = k | Z = 3)$ voor alle relevante waarden van k .

(c) Geef, met behulp van (b), $E(Y | Z = 3)$.

(d) We zeggen dat bij het werpen 'het getal n wordt bezocht' als er een k is met $\sum_{i=1}^k X_i = n$. Laat A de gebeurtenis zijn dat het getal 450 wordt bezocht en B de gebeurtenis dat het getal 452 wordt bezocht. Geef, met een korte toelichting (geen lange berekening!) $P(B|A)$.

(e) Laat S de som van alle worpen zijn, dus

$$S = \sum_{i=1}^{600} X_i.$$

Geef de verwachting van S en ga na dat de variantie van S gelijk is aan 1750. Laat met behulp van de Centrale Limiet Stelling zien dat

$$P(2050 \leq S \leq 2150)$$

ongeveer gelijk is aan $P(|N| \leq \sqrt{(10/7)})$, waar N een standaard normaal verdeelde stochast is.

4. Laat p een getal tussen 0 en 1 zijn. Stel X_n is binomiaal verdeeld met parameters n en p/n . Laat met een berekening zien dat als $n \rightarrow \infty$, de kansmassafunctie van X_n convergeert naar de Poisson kansmassafunctie met parameter p . (Gebruik dat $(1 - p/n)^n \rightarrow e^{-p}$ als $n \rightarrow \infty$).

5. Beschouw de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{als } 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Laat zien dat f een kansdichtheid is.

(b) Laat X en Y stochasten zijn met simultane kansdichtheid f . Geef de marginale kansdichtheid van X .

(c) Laat $Z = X + Y$. Geef de kansdichtheid van Z .