

Tweede deeltentamen Kansrekening II W/Ect.

1 juni 2005, 13.30-15.30

Dit tentamen bestaat uit vier opgaven met in totaal elf onderdelen. Elk onderdeel van opgave 1 heeft gewicht 1, alle andere onderdelen hebben gewicht 2. Bij opgave 1 hoeft u alleen de antwoorden te geven; bij de beantwoording van de andere opgaven moet u bovendien een beknopte en zorgvuldige redenering of berekening geven.

1. (a) Laat X en Y onafhankelijke, normaal verdeelde stochasten zijn: X met verwachting μ en variantie σ^2 ; Y met verwachting ν en variantie η^2 . Zoals u weet is dan de stochast $2X$ normaal verdeeld met verwachting 2μ en variantie $4\sigma^2$. Hoe zijn de volgende stochasten verdeeld: $-X$, $X + Y$ en $X - Y$?

(b) Laat Z exponentieel verdeeld zijn met parameter λ ; dus

$$P(Z > z) = e^{-\lambda z}, z \geq 0.$$

Geef de verwachting van Z . Hoe is de stochast $2Z$ verdeeld?

(c) Laat U uniform verdeeld zijn op het interval $(0, a)$, en b een reëel getal. Hoe is de stochast $a - U$ verdeeld? En de stochast $b + U$?

2. Alice vertrekt om 5 voor 11 naar het station. Het kost haar X minuten daar te komen. Haar trein vertrekt van dat station om Y minuten over 11. Dus Alice haalt haar trein als $X - 5 < Y$.

(a) Neem aan dat X en Y onafhankelijke stochasten zijn, die uniform verdeeld zijn op het interval $(5, 8)$, respectievelijk het interval $(0, 5)$. Bereken de kans dat Alice de trein haalt.

(b) Dezelfde vraag als bij (a), maar nu nemen we aan dat Y exponentieel verdeeld is en dezelfde verwachting heeft als bij (a) (dus dat Y exponentieel verdeeld is met parameter $2/5$).

3. Beschouw de functie

$$f(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-(x+y)} & \text{als } x, y \geq 0, x + y \leq 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Voor welke waarde van α is f een kansdichtheid? (Opmerking: in de onderdelen (b) t/m (d) kunt u uw antwoorden uitdrukken in α . Voor die onderdelen is het dus niet noodzakelijk eerst (a) te doen).

- (b) Laat X en Y stochasten zijn met simultane kansdichtheid f . Bepaal de marginale kansdichtheid van X en de verwachting van X .
- (c) Laat $Z = X + Y$. Bereken de simultane kansdichtheid van X en Z , en de marginale kansdichtheid van Z .
- (d) Bepaal nu, (voor $z \leq 1$), de conditionele verdeling van X gegeven $Z = z$. Hoe heet, bij gegeven z , deze eenvoudige verdeling?

4. Alice heeft haar trein gehaald, en moet nu bij het eindstation op Bob wachten. Om de tijd door te brengen doet zij 400 stappen in een bepaalde richting. Deze stappen hebben lengte $X_1, X_2, \dots$, respectievelijk X_{400} centimeter. Daarna keert ze om en doet 400 stappen in de richting van het beginpunt van haar wandeling. Deze stappen hebben lengte $Y_1, Y_2, \dots$, respectievelijk Y_{400} centimeter. Laat

$$Z = \sum_{k=1}^{400} X_k - \sum_{k=1}^{400} Y_k = \sum_{k=1}^{400} (X_k - Y_k).$$

We nemen aan dat $X_1, \dots, X_{400}, Y_1, \dots, Y_{400}$ onafhankelijke stochasten zijn, die allemaal dezelfde verdeling hebben, met verwachting 60 en variantie 25.

- (a) Geef de verwachting en variantie van $X_1 - Y_1$ en van Z .
- (b) We beschouwen de kans dat Alice nu hoogstens 2 meter van het beginpunt verwijderd is (dus de kans dat $|Z| \leq 200$). Geef, door toepassing van de Centrale Limiet Stelling, en met gebruik van de volgende numerieke gegevens, een benadering van deze kans:

Voor een standaard normaal verdeelde stochast N geldt $P(|N| \leq 1.2) \approx 0.77$, $P(|N| \leq 1.3) \approx 0.81$, $P(|N| \leq 1.4) \approx 0.84$, $P(|N| \leq 1.5) \approx 0.87$, $P(|N| \leq 1.6) \approx 0.89$ en $P(|N| \leq 1.7) \approx 0.91$.