



2e deeltentamen Kansrekening II

26 mei 2004, 13.30-15.30

1. De stochastische vector (X, Y) heeft dichtheid $f(x, y)$ met

$$f(x, y) = 32xy, \quad 0 \leq x \leq 1/2, \quad 0 \leq y \leq 2x,$$

en $f(x, y) = 0$ elders.

- (a) (2 punten) Laat zien dat dit een dichtheid is.
- (b) (3 punten) Bepaal de marginale dichtheid van X .
- (c) (3 punten) Bepaal de conditionele verdeling van Y gegeven $X = x$, voor alle relevante waarden van x .
- (d) (3 punten) Bepaal $E(Y|X = x)$ en gebruik dit om $E(Y)$ uit te rekenen.
- (e) (3 punten) Bereken de covariantie van X en Y .
- (f) (3 punten) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

2. (6 punten) Laat X en Y continue stochastische grootheden zijn met gezamenlijke dichtheid

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & \text{als } x \geq 0 \text{ en } y \geq 0 \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Bereken de gezamenlijke dichtheid van $U = X$ en $V = X + Y$.

3. Een boekhouder wil zijn boekhouding vereenvoudigen door alle bedragen af te ronden op hele euros, en wel naar het dichtstbijzijnde gehele getal. Zo wordt 4,45 afgerond op 4, en 4,72 op 5. De boekhouder is geïnteresseerd in de som van de eerste 100 afrondingsfouten. We maken het volgende model: De afrondingsfouten noteren we met $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$, waarbij de X_i 's onafhankelijke en gelijk verdeelde stochastische grootheden zijn met een (continue) uniforme verdeling op $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

- (a) (3 punten) Bepaal de verwachting en variantie van X_1 .
- (b) (5 punten) Gebruik de Centrale Limiet Stelling om te laten zien dat $P(|X_1 + X_2 + \dots + X_{100}| > 10)$ ongeveer gelijk is aan $2P(N > \sqrt{12})$, waarbij N een standaard normaal verdeelde stochastische grootheid is.

4. (5 punten) Stel X_n is geometrisch verdeeld met parameter $1/n$, d.w.z. dat X waarden aanneemt in $1, 2, \dots$ en dat

$$P(X_n > k) = (1 - \frac{1}{n})^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

We definiëren $Y_n = X_n/n$. Laat zien dat als $n \rightarrow \infty$, $Y_n \Rightarrow Y$, waarbij Y een exponentiële verdeling heeft met parameter 1.