

Tentamen Kansrekening II

13 augustus 2003, 13.30-16.30

1. We gooien twee maal met een zuivere dobbelsteen. Het aantal keren dat we twee ogen gooien noemen we X , en Y is het aantal keren dat we drie ogen gooien.

- (a) (5 punten) Bepaal de gezamenlijk kansmassafunctie van X en Y .
- (b) (5 punten) Gebruik (a) om de verdeling van $Z = X + Y$ te bepalen.
- (c) (5 punten) Bereken $E(X|Y = y)$ voor alle relevante waarden van y .

2. De continue stochastische vector (X, Y) heeft gezamenlijke dichtheid

$$f(x, y) = y^2 e^{-y(x+1)},$$

voor $x, y \geq 0$, en $f(x, y) = 0$ elders.

- (a) (5 punten) Bepaal de marginale dichtheid $f_Y(y)$ van Y .
- (b) (5 punten) Bereken $E(Y)$.
- (c) (5 punten) Bereken $f_{X|Y}(x|y)$ en gebruik dit om $E(X|Y = y)$ te bepalen.
- (d) (5 punten) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

3. Beschouw onafhankelijke stochastische grootheden $X_1, X_2, \dots, X_n$ met dezelfde verdeling met eindige verwachting en variantie. De som $X_1 + \dots + X_n$ geven we aan met S_n . In de centrale limietstelling uit het dictaat wordt de verdeling van S_n benaderd door een normale verdeling.

- (a) (5 punten) Laat zien dat we het *gemiddelde* S_n/n ook kunnen benaderen met een normale verdeling, en formuleer een centrale limiet stelling voor het gemiddelde.
- (b) (5 punten) We trekken 15 keer uit een verdeling met dichtheid $f(y) = 3(1 - y)^2, 0 \leq y \leq 1$, en het gemiddelde van die 15 trekkingen geven we aan met Y . Gebruik de centrale limiet stelling uit (a) om een benadering te geven voor $P(\frac{1}{8} \leq Y \leq \frac{3}{8})$. Leg hierbij duidelijk uit wat je precies doet.

4. We gooien 200 keer met een zuivere munt. We definiëren stochastische grootheden $X_i, i = 1, \dots, 200$ door $X_i = 1$ als de i -de worp kop oplevert, en $X_i = 0$ als de i -de worp munt oplevert. We schrijven $X = X_1 + \dots + X_{200}$.

- (a) (5 punten) Gebruik de ongelijkheid van Chebyshev om een ondergrens te berekenen voor de kans dat X minder dan 5 afwijkt van $E(X)$.
- (b) (5 punten) Gebruik de centrale limiet stelling om dezelfde kans als in (a) te benaderen.
- (c) (5 punten) Wat is je conclusie gebaseerd op (a) en (b)?

5. (10 punten) Stel X en Y hebben een gezamenlijke dichtheid gegeven door $f(x, y) = 1$, voor $0 < x < 1$ en $0 < y < 1$, en $f(x, y) = 0$ elders. Bereken de dichtheid van $Z = XY$.
6. (5 punten) Een zuiver munt wordt vijf keer gegooid. Laat Y het aantal keren kop zijn in het totaal van de vijf worpen, en laat X het aantal keren kop zijn in de laatste twee worpen. Bepaal $p_{Y|X}(y|x)$ voor alle relevante waarden van x .