

Uitwerking 2e deeltentamen Kansrekening II

28 mei 2003, 10.30-12.30

1. De stochastische vector (X, Y) heeft dichtheid $f(x, y)$ gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & \text{voor } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) $f(x, y)$ is een dichtheid als $\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y 8xy dx dy = \int_{y=0}^1 4y^3 dy = 1$$

(b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_y f(x, y) dy = \int_{y=x}^1 8xy dy = 4x - 4x^3, \text{ voor } x \in [0, 1] \\ f_Y(y) &= \int_x f(x, y) dx = \int_{x=0}^y 8xy dx = 4y^3, \text{ voor } y \in [0, 1] \\ f_{X+Y}(u) &= \int_x f(x, u-x) dx \end{aligned}$$

Er moet gelden dat $0 \leq x \leq u-x \leq 1$ voor $u \in [0, 2]$. Dus $x \leq \frac{u}{2}$ en $x \geq u-1$. Als $u \in [0, 1]$ dan $u-1 \leq 0$, en dus $x \in [0, \frac{u}{2}]$. Als $u \in (1, 2]$ dan $x \in [u-1, \frac{u}{2}]$. Dan voor $u \in [0, 1]$:

$$f_{X+Y}(u) = \int_{x=0}^{u/2} 8x(u-x) dx = \frac{2}{3}u^3$$

en voor $u \in (1, 2]$:

$$f_{X+Y}(u) = \int_{x=u-1}^{u/2} 8x(u-x) dx = 4u - \frac{2}{3}(u^3 + 4)$$

(c) Voor $\text{Var}(X+Y)$ geldt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - [E(X+Y)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2 + 2E(XY) - 2E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Deze afzonderlijke termen kunnen we allemaal berekenen:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_x x f_X(x) dx = \int_{x=0}^1 4x^2 - 4x^4 dx = \frac{8}{15} \\
E(X^2) &= \int_x x^2 f_X(x) dx = \int_{x=0}^1 4x^3 - 4x^5 dx = \frac{1}{3} \\
E(Y) &= \int_y y f_Y(y) dy = \int_{y=0}^1 4y^4 dy = \frac{4}{5} \\
E(Y^2) &= \int_y y^2 f_Y(y) dy = \int_{y=0}^1 4y^5 dy = \frac{4}{6} \\
E(XY) &= \int_x \int_y xy f(x, y) dy dx = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^y 8x^2 y^2 dx dy = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Dus $\text{Var}(X + Y) = \frac{1}{9}$

(d) Er geldt niet dat $E(XY) = E(X)E(Y)$, dus X en Y kunnen niet onafhankelijk zijn.

(e) Voor $y \in [0, 1]$ geldt dat $f_Y(y) \neq 0$, dus voor $0 \leq x \leq y \leq 1$ geldt:

$$\begin{aligned}
f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y^3} = 2\frac{x}{y^2} \\
E(X|Y = y) &= \int_x x f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{x=0}^y 2\frac{x^2}{y^2} = \frac{2}{3}y \\
E(X) &= \int_y E(X|Y = y) f_Y(y) dy = \int_{y=0}^1 \frac{8}{3}y^4 dy = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

2. (a) Zij $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijk, gelijkverdeelde stochastische variabelen met eindige verwachting μ en variantie σ^2 . Voor $S_n = X_1 + \dots + X_n$ geldt dan:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \rightsquigarrow U, \text{ waar } U \sim N(0, 1)$$

(b) In dit geval geldt dat $n = 20$ en $X_i \sim \text{uniform}(0, 1)$ voor alle $i = 1, \dots, 20$ en onafhankelijk met $E(X_i) = \frac{1}{2}$ en $\text{Var}(X_i) = \frac{1}{12}$. $S = X_1 + \dots + X_{20}$, dus de CLS zegt dat $\frac{S - 20\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}\sqrt{20}} \rightsquigarrow N(0, 1)$ dus:

$$P\left(\frac{S - 20\frac{1}{2}}{\frac{1}{12}\sqrt{20}} \leq u\right) = \Phi(u)$$

Welnu:

$$P(S > 8) = 1 - P(S \leq 8) = 1 - P\left(\frac{S - 10}{\frac{\sqrt{20}}{12}} \leq \frac{8 - 10}{\frac{\sqrt{20}}{12}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{20}}\right)$$

3.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{als } X_i \leq 1,70, \\ 0 & \text{als } X_i > 1,70. \end{cases}$$

(a) Omdat Y_i discreet is geldt dat:

$$E(Y_i) = 0 \times P(Y_i = 0) + 1 \times P(Y_i = 1) = P(X_i \leq 1,70) = F_X(1,70)$$

(b) Voor grote n geldt op grond van de wet van de grote aantallen dat:

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \longrightarrow E(Y_i) = F_X(1,70)$$

Dus we trekken willekeurig n mensen, waarbij n groot is, en bekijken het aantal mensen dat niet langer is dan 1,70 m. Dit aantal is precies gelijk aan $Y_1 + \dots + Y_n$. Delen we dit aantal door het totaal aantal mensen dan krijgen we een benadering voor $E(Y_i)$ en dus voor $F_X(1,70)$.

4. $X \sim \exp(\lambda)$ en $Y|X = x \sim \text{uniform}(0, x)$, dus $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ voor $x > 0$ en $f_{Y|X}(y|x) = 1/x$ voor $0 \leq y \leq x$.

(a) Er geldt dat:

$$E(Y|X = x) = \int_y y f_{Y|X}(y|x) dy = \int_{y=0}^x y \frac{1}{x} dy = \frac{1}{2}x$$

(b) Nu:

$$E(Y) = \int_x E(Y|X = x) f_X(x) dx = \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2}x \lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda}$$

(c) Voor de gezamenlijke dichtheid $f(x, y)$ van X en Y geldt:

$$f(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x) = \frac{\lambda}{x} e^{-\lambda x}, \text{ voor } 0 \leq y \leq x$$

(d) Er geldt dat $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int \int_{\{(x,y): y \leq x\}} xy f(x, y) dx dy \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^x xy \frac{\lambda}{x} e^{-\lambda x} dy dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\text{p.i.}}{=} \\ &= \frac{1}{2} \left[-x^2 e^{-\lambda x} \Big|_{x=0}^{\infty} + 2 \frac{1}{\lambda} \int_{x=0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } \text{cov}(X, Y) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\lambda^2}$$