

2e deeltentamen Kansrekening II

28 mei 2003, 10.30-12.30

1. De stochastische vector (X, Y) heeft dichtheid $f(x, y)$ gegeven door

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & \text{voor } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) (5 punten) Laat zien dat dit inderdaad een dichtheid is.
- (b) (10 punten) Bepaal de dichtheden van X , Y en $X + Y$.
- (c) (10 punten) Bepaal $\text{var}(X + Y)$.
- (d) (5 punten) Laat zien dat X en Y niet onafhankelijk zijn.
- (e) (10 punten) Bereken $f_{X|Y}(x|y)$ en $E(X|Y = y)$ en tenslotte $E(X)$ met behulp van deze voorwaardelijke verwachting.

2. (a) (5 punten) Formuleer de centrale limietstelling.
- (b) (10 punten) Stel we trekken 20 keer een getal uit het interval $(0, 1)$, waarbij de verschillende trekkingen onafhankelijk zijn van elkaar, en waarbij we veronderstellen dat de trekkingen uniform $(0, 1)$ verdeeld zijn. De som van de 20 trekkingen noemen we S . Benader de kans dat S groter is dan 8 met behulp van de centrale limietstelling. (Het antwoord mag je uitdrukken in de verdelingsfunctie van de standaard normale verdeling.)

3. Stel dat we iets te weten willen komen over de lengte van inwoners van Nederland. Als X de lengte voorstelt van een willekeurig gekozen nederlander, dan willen we bijvoorbeeld $F_X(1, 70) = P(X \leq 1, 70)$ bepalen, de kans dat een willekeurig gekozen persoon niet langer is dan 1 meter 70. Hierbij gaan we als volgt te werk. We trekken n willekeurige personen uit de bevolking van Nederland, en hun lengtes geven we aan met $X_1, \dots, X_n$. Verder definiëren we

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{als } X_i \leq 1, 70, \\ 0 & \text{als } X_i > 1, 70. \end{cases}$$

- (a) (5 punten) Laat zien dat $E(Y_i) = F_X(1, 70)$.
 - (b) (10 punten) Leg uit hoe we met behulp van een wet van de grote aantallen op basis van $Y_1, \dots, Y_n$ een idee kunnen krijgen hoe groot $F_X(1, 70)$ is.
4. Laat X exponentieel verdeeld zijn met parameter λ . Gegeven $X = x$ is de stochastische grootheid Y uniform verdeeld op $(0, x)$, d.w.z. $f_{Y|X}(y|x) = 1/x$, voor $0 \leq y \leq x$.

- (a) (5 punten) Bepaal $E(Y|X = x)$.
- (b) (5 punten) Bepaal $E(Y)$ m.b.v. het antwoord in (a).
- (c) (5 punten) Bepaal de gezamenlijke dichtheid $f(x, y)$ van X en Y .
- (d) (5 punten) Bereken $\text{cov}(X, Y)$.