



Eerste deeltentamen Kansrekening II

26 maart 2003

1. De discrete stochastische vector (X, Y) heeft kansmassafunctie $p(x, y)$ gegeven door $p(0, 0) = \frac{2}{5}$, $p(0, 1) = \frac{1}{5}$, $p(1, 0) = \frac{1}{10}$ en $p(1, 1) = \frac{3}{10}$.

(a) Bepaal de marginale kansmassafuncties van X en van Y .

(b) Bepaal $p_{X|Y}(0|1)$ en $p_{X|Y}(1|1)$.

(c) Bereken $E(X|Y = 1)$.

(d) Bereken de verwachting van $X + Y$.

Oplossing:

(a) $P(X = 0) = p(0, 0) + p(0, 1) = 3/5$; $P(X = 1) = 2/5$; $P(Y = 0) = p(0, 0) + p(1, 0) = 1/2$; $P(Y = 1) = 1/2$.

(b) $p_{X|Y}(0|1) = P(X = 0|Y = 1) = p(0, 1)/P(Y = 1) = 2/5$;

$p_{X|Y}(1|1) = P(X = 1|Y = 1) = p(1, 1)/P(Y = 1) = 3/5$.

(c) $E(X|Y = 1) = 0 \cdot p_{X|Y}(0|1) + 1 \cdot p_{X|Y}(1|1) = 3/5$.

(d) $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2/5 + 1/2 = 9/10$.

ofwel: $E(X + Y) = \sum_{x,y} (x + y)p(x, y) = 1/5 + 1/10 + 3/10 \cdot 2 = 9/10$.

2. De continue stochastische vector (X, Y) heeft dichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot x(2 - x - y) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal de constante c .

(b) Bepaal de marginale dichtheid van Y .

(c) Bepaal de verwachting van Y .

(d) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.

Oplossing:

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 x(2 - x - y) dx dy &= \int_0^1 [x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 y]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y) dy = 5/12. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $c = 12/5$.

(b)

$$f_Y(y) = 12/5 \int_0^1 x(2 - x - y) dx = \frac{12}{5} (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}y)$$

zoals we bij (a) al hadden uitgerekend. Dus $f_Y(y) = \frac{8}{5} - \frac{6}{5}y$, voor $0 < y < 1$, en $f_Y(y) = 0$ elders.

(c) $E(Y) = \int_0^1 y f_Y(y) dy = \int_0^1 y (\frac{8}{5}y - \frac{6}{5}y^2) dy = 2/5.$

(d) Nee, want $f(x, y)$ is niet te schrijven als het product van een functie van x en een functie van y .

3. De stochastische grootheid Y heeft een uniforme verdeling op $(0, 5)$. Wat is de kans dat de tweedegraadsvergelijking (in x)

$$4x^2 + 4xY + Y + 2 = 0$$

twee (reële) nulpunten heeft? Bedenk hierbij dat je dit kunt aflezen aan de discriminant van de vergelijking.

Oplossing:

De discriminant is gelijk aan

$$D = (4Y)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (Y + 2) = 16Y^2 - 16(Y + 2).$$

De vergelijking heeft twee oplossingen als $D > 0$, dus als $Y^2 - Y - 2 > 0$. Dit is waar als $Y < -1$ of $Y > 2$. Aangezien Y uniform verdeeld is op $(0, 5)$ geldt dat $P(Y < -1) = 0$ en $P(Y > 2) = 3/5$. Dus de gevraagde kans is $3/5$.

4. De continue stochastische vector (X, Y) heeft dichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

(a) Laat zien dat f inderdaad een dichtheid is.

(b) Bereken $P(X + Y < 1)$.

Oplossing:

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy &= \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2 = xy]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (\frac{1}{2} + y) dy = 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(X + Y < 1) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} (x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 x - x^2 + \frac{1}{2} - x \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

5. X_1 en X_2 zijn onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 1$. Laat $Y_1 = X_1 + X_2$, en $Y_2 = e^{X_1}$. Bepaal de verdeling van (Y_1, Y_2) .

Oplossing:

Neem de functie $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, e^{x_1}) = (y_1, y_2)$, dan is $(Y_1, Y_2) = g(X_1, X_2)$. Voor de dichtheid van (Y_1, Y_2) bepalen we de inverse van g :

$$x_1 = \log y_2; \text{ en } x_2 = y_1 - \log y_2.$$

Van deze afbeelding bepalen we de matrix van partiële afgeleiden. Deze is

$$\begin{pmatrix} 0 & y_2^{-1} \\ 1 & -y_2^{-1} \end{pmatrix},$$

en de absolute waarde van de determinant hiervan is y_2^{-1} . Neem nu $y_1 > \log y_2$ en $y_2 > 1$ (het bereik van g), dan vinden we dat

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = f_{(X_1, X_2)}(\log y_2, y_1 - \log y_2) \cdot y_2^{-1},$$

en aangezien de simultane dichtheid van X_1 en X_2 gegeven wordt door

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2},$$

leidt dit tot

$$f_{(Y_1, Y_2)}(y_1, y_2) = e^{-\log y_2 - y_1 + \log y_2} y_2^{-1} = e^{-y_1} y_2^{-1},$$

voor $y_1 > \log y_2$ en $y_2 > 1$.