

1. $X, X_1, X_2, \dots$ zijn stochastische grootheden, onafhankelijk en met dezelfde dichtheid $f(x)$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} Cx(3-x), & \text{voor } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de constante C .
 (b) Bereken de verwachting en variantie van X .
 (c) Bepaal a en b zodanig dat

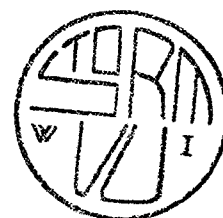
$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - na}{b\sqrt{n}}$$

voor grote n ongeveer een $N(0, 1)$ verdeling heeft. Motiveer je keuze.

2. De stochastische vector (X, Y) heeft dichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & \text{voor } 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Laat zien dat $f(x, y)$ een dichtheid is.
 (b) Bepaal $f_{Y|X}(y|x)$ en $f_{X|Y}(x|y)$.
 (c) Bepaal $E(Y|X=x)$ voor alle relevante x .
 (d) Bepaal de verdeling van $X+Y$.
 (e) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.



3. Van de stochastische grootheden X en Y weten we dat Y standaard exponentieel verdeeld is, en dat $P(X \leq x|Y=y) = \frac{x}{y}$ voor $0 < x \leq y$.

- (a) Bepaal $f_{X|Y}(x|y)$.
 (b) Bepaal $E(X|Y=y)$.
 (c) Bepaal de simultane dichtheid van X en Y .

4. $X_1, X_2, \dots$ zijn onafhankelijk en gelijkverdeeld met dichtheid $f(x) = 1/10$ voor $0 \leq x \leq 10$ en $f(x) = 0$ elders. We schrijven $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ voor $n = 1, 2, \dots$

- (a) Bereken $E(S_n)$ en $\sigma^2(S_n)$.
 (b) Laat zien dat

$$P(S_n \geq 6n) \leq P(|S_n - E(S_n)| \geq n).$$

- (c) Gebruik (b) en de ongelijkheid van Chebyshev om te laten zien dat

$$P(S_n \geq 6n) \rightarrow 0,$$

als $n \rightarrow \infty$.