

Duur: 3 uur

Normering:

$1a : 3$; $2a : 2$; $3a : 3$; $4a : 1$;
 $b : 2$; $b : 3$; $b : 4$; $b : 3$;
 $c : 1$; $c : 3$; $c : 3$; $c : 3$;
 $d : 3$; $d : 2$.

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Rekenmachines zijn niet nodig en niet toegestaan. Het is onnodig uitdrukkingen met wortels of e-machten, ingewikkelde breuken en dergelijke te vereenvoudigen.

1. Zij $a \in \{1, 2, \dots, 5\}$. Men werpt een zuivere dobbelsteen. Zij X_1 het aantal ogen. Als $X_1 > a$, dan krijgt men het aantal ogen in guldens uitbetaald. Als $X_1 \leq a$, dan werpt men nogmaals een dobbelsteen en krijgt men het aantal ogen van die tweede worp, zeg X_2 , in guldens uitbetaald. Zij Y het aantal uitbetaalde guldens.
 - (a) Bepaal de voorwaardelijke verwachtingen $\mathbf{E}(Y \mid X_1 \leq a)$ en $\mathbf{E}(Y \mid X_1 > a)$.
 - (b) Bepaal $\mathbf{E}Y$.
 - (c) Voor welke waarde van a is de verwachte uitbetaling het grootst?
2. Men werpt een zuivere dobbelsteen herhaald en onafhankelijk tot men een zes heeft gegooid. Zij het aantal worpen N .
 - (a) Wat voor een kansverdeling heeft N ? Bepaal verwachting van N . Toon aan dat de variantie van N gelijk is aan 30.

Nu herhaalt men het experiment onafhankelijk k maal. Zij S_k de som van de uitkomsten van de experimenten, met andere woorden zij S_k het totaal aantal worpen.

- (b) Waarom bestaat er een getal a zo dat $\mathbf{P}(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} S_k = a) = 1$, en wat is die waarde van a ?
- (c) Geef een goede benadering van $\mathbf{P}(S_{120} \leq 780)$.
- (d) Hoe heet de stelling waarop u de benadering uit (c) baseert? Formuleer die stelling precies, kort en volledig.

Z.O.Z.

3. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk. De kansdichtheden f_X van X en f_Y van Y zijn gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1; \\ 0, & x \leq 0 \text{ of } x \geq 1; \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1; \\ 0, & y \leq 0 \text{ of } y \geq 1. \end{cases}$$

We definiëren $U = X + Y$.

- (a) Bepaal de verwachting $\mathbb{E}U$ en de variantie $\text{Var}(U)$ van U .
 - (b) Bepaal de kansdichtheid van U .
 - (c) Bepaal de verdelingsfunctie van $Z = U^2$.
4. De kansdichtheid $f_{X,Y}$ van de stochastische vector (X, Y) wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |x| + |y| < 1; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Schets een waardenverzameling van (X, Y) .
- (b) Bepaal de marginale kansdichtheid van X en bereken daarmee de verwachting en variantie van X .
- (c) Zij $U = -\ln(|X| + |Y|)$. Bepaal de verdelingsfunctie van U en laat zien dat U exponentieel verdeeld is met parameter λ en bepaal λ .
- (d) Bepaal de voorwaardelijke dichtheid van X gegeven $Y = y$.