
Normering:

$$\begin{array}{lclcl} 1a : 4 & ; & 2a : 3 & ; & 3a : 3 & ; & 4a : 2; \\ & & b : 3 & ; & b : 4 & ; & b : 3; \\ & & c : 3 & ; & c : 4 & ; & c : 3; \\ & & & & d : 2; \\ & & & & e : 2; \end{array}$$

$$\text{Eindcijfer} = 1 + \frac{\text{totaal}}{4}.$$

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Rekenmachines zijn niet nodig en niet toegestaan. Het is onnodig uitdrukkingen met wortels of e-machten, ingewikkelde breuken en dergelijke te vereenvoudigen.

1. Een fabrikant van fietsbanden produceert twee uiterlijk identieke typen banden, zeg type A en type B. Een fietsband heeft een levensduur van 10000 kilometer. We nemen aan dat het aantal malen dat een band van type A lek raakt gedurende die 10000 km Poisson verdeeld is met verwachting 2. Het aantal malen dat een band van type B lek raakt gedurende die 10000 km wordt verondersteld Poisson verdeeld te zijn met verwachting 4. Van de verkochte fietsbanden is 60% van het type A en 40% van het type B.

Als een fietser slechts 1 lekke band krijgt gedurende de 10000 km die zij/hij aflegde met bepaalde band, wat is dan de kans dat die band van het type A was?

2. Bij een worp met een zuivere dobbelsteen is, zoals bekend, de verwachting van het aantal ogen $\frac{7}{2}$ en de variantie van het aantal ogen $\frac{35}{12}$. We werpen nu n maal onafhankelijk met de dobbelsteen en berekenen het gemiddelde geworpen aantal ogen S_n .

(a) Toon aan dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(3,25 \leq S_n \leq 3,75) = 1$.

- (b) Bepaal een *goede benadering* van de waarde die n minimaal moet hebben om er voor te zorgen dat de kans dat S_n tussen 3,25 en 3,75 ligt tenminste 0,95 is.

- (c) Hoe heet de stelling waarop u de benadering uit (b) baseert? Formuleer die stelling precies, kort en volledig.

Z.O.Z.

3. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk. De kansdichtheden f_X van X en f_Y van Y zijn gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y} & y > 0; \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

We definiëren $U = X + Y$.

- (a) Bepaal de verwachting $\mathbb{E}(U^2)$ van U^2 .
- (b) Bepaal de kansdichtheid van U .
- (c) Bepaal de kansdichtheid van U^2 .

4. De kansdichtheid $f_{X,Y}$ van de stochastische vector (X, Y) wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x}, & \frac{1}{2}y^2 \leq x; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat Y normaal verdeeld is en bepaal de verwachting en variantie van Y .
- (b) Bepaal de marginale kansdichtheid van X en bereken daarmee de verwachting van $\sqrt{|X|}$.
- (c) Zij $U = X - \frac{1}{2}Y^2$. Toon aan dat U exponentieel(λ) verdeeld is en bepaal λ .
- (d) Bepaal de verwachting $\mathbb{E}X$ van X .
(Bijvoorbeeld door X uit te drukken in U en Y .)
- (e) Toon aan dat de voorwaardelijke verwachting van X gegeven $Y = y$ wordt gegeven door $\mathbb{E}(X \mid Y = y) = 1 + \frac{1}{2}y^2$.