

Duur: $1\frac{3}{4}$ uur

Normering:

$1a : 1$; $2a : 3$; $3a : 3$;
 $b : 2$; $b : 2$; $b : 1$;
 $c : 1$; $c : 3$; $c : 2$;
 $d : 2$; $d : 3$;
 $e : 2$;
 $f : 2$.

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{3}$.

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Rekenmachines zijn niet nodig en niet toegestaan. Het is onnodig uitdrukkingen met wortels of e-machten, ingewikkelde breuken en dergelijke te vereenvoudigen.

1. We nemen blindelings een greep van twee ballen uit een bak met vier ballen waarvan er twee wit en twee zwart zijn. Zij X het aantal witte ballen in de greep.

(a) Wat heeft X voor een verdeling en toon aan dat de verwachting $\mathbb{E}X = 1$.

We geven dat $\text{Var}X = \frac{1}{3}$.

We herhalen nu het experiment onafhankelijk n maal.

- (b) Neem $n = 300$. We tellen het totale aantal getrokken witte ballen. Geef een goede benadering van de kans dat dit aantal groter is dan 310.
- (c) Neem $n = 300$. Geef een exacte formule voor de kans dat het aantal getrokken witte ballen precies 1 is, en geef een benadering in 5 decimalen voor die kans. (*Bij dit onderdeel wordt geen witleg gevraagd.*)
- (d) Neem $n = 180$. Geef een goede benadering voor de kans dat er precies 25 grepen zijn waarin geen enkele witte bal wordt getrokken.
- (e) De berekeningen bij onderdelen (b) en (d) zijn gebaseerd op een belangrijke stelling. Formuleer die stelling nauwkeurig.
- (f) Zij S_n het totale aantal witte ballen dat in n onafhankelijke herhalingen van het experiment wordt getrokken. Zij $a > 0$. Bereken $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}|S_n - n| \geq a)$. Hoe heet de stelling waarop de berekening berust?

Z.O.Z.

2. De stochastische variabelen X en Y zijn onafhankelijk. X is homogeen verdeeld op het interval $(0, 1)$ en Y is homogeen verdeeld op het interval $(-1, 0)$. We definiëren $U = X + Y$, $V = \frac{Y}{X}$ en $W = Y(X + Y)$.
- (a) Bepaal de kansdichtheid van U .
 - (b) Bepaal de verwachting $\mathbb{E}W$ van W .
 - (c) Bepaal de verdelingsfunctie van V .
3. De kansdichtheid $f_{X,Y}$ van de stochastische vector (X, Y) wordt gegeven door

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-(y + \frac{1}{2}x)}, & 0 < x < 2y; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de marginale kansdichtheden van X en Y .
- (b) Zijn X en Y onafhankelijk?
- (c) Bepaal voor $x > 0$ de voorwaardelijke kansdichtheid van Y gegeven $X = x$ en laat daarmee zien dat $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = 1 + \frac{1}{2}x$.
- (d) Bepaal de verwachting van Y *op twee manieren* door gebruik te maken van de resultaten uit de onderdelen (a) en (c).