

1. (a) X is hypergeometrisch ($r = 4, m = 2, n = 2$) verdeeld, en dus is de verwachting $\mathbb{E}X = n \frac{m}{r} = 1$.
- (b) Zij X_k het aantal witte ballen bij de k -de trekking. Dan is het totale aantal getrokken ballen $S_{300} = X_1 + \dots + X_{300}$. Dus $\mathbb{E}S_{300} = 300$ en daar de trekkingen onafhankelijk zijn is $\text{Var}S_{300} = 300 \times \frac{1}{3} = 100 = 10^2$. Zij Y_{300} normaal verdeeld met verwachting 300 en standaard afwijking 10. Dan is de gevraagde kans $\mathbb{P}(S_{300} > 310)$ ongeveer $1 - \mathbb{P}(Y_{300} \leq 310,5) = 1 - \Phi(\frac{310,5-300}{10}) = 1 - \Phi(1,05) = 0,1469$.
- (c) Als er precies 1 witte bal getrokken wordt, dan wordt er 299 maal geen witte bal en 1 maal een witte bal getrokken. De kans daarop is $300(\frac{1}{6})^{299}\frac{2}{3}$, wat in een uitstekende benadering 0,00000 is.
- (d) Het aantal grepen Z waarbij geen enkele witte bal wordt getrokken is binomiaal ($n = 180, p = \frac{1}{6}$) verdeeld. Dus $\mathbb{E}Z = 180 \cdot \frac{1}{6} = 30$ en $\text{Var}Z = 180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 25$. Zij U normaal verdeeld met dezelfde verwachting en variantie als Z . Dan wordt een goede benadering van $\mathbb{P}(Z = 25)$ gegeven door $\mathbb{P}(24,5 \leq U \leq 25,5) = \Phi(\frac{25,5-30}{5}) - \Phi(\frac{24,5-30}{5}) = \Phi(-0,9) - \Phi(-1,1) = 0,0484$.
- (e) De gevraagde stelling is de Centrale Limietstelling. Formulering: zie dictaat.
- (f) Zij $\bar{X}_n = \frac{1}{n}S_n$ het gemiddelde aantal getrokken witte ballen in n trekkingen. De gevraagde uitdrukking:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\frac{1}{n}|S_n - n| \geq a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - 1| \geq a) = 0$, vanwege de *zwakke wet van grote aantallen*, omdat de X_k ($k = 0, 1, \dots$) paarsgewijs onafhankelijk gelijkverdeeld met verwachting 1 zijn.

2. Merk op dat de kansdichtheden van X , respectievelijk Y , worden gegeven door:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{elders;} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & -1 < y < 0; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) De waardenverzameling van U is het interval $(-1, 1)$. Voor u in de waardenverzameling van U hebben we:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) f_X(u-y) dy = \int_{u-1}^u f_Y(y) dy,$$

want $f_X(u-y) = 1$ als en alleen als $0 < u-y < 1$ wat neerkomt op $u-1 < y < u$. Dus voor $-1 < u \leq 0$ hebben we $f_U(u) = \int_{-1}^u dy = u+1$ en voor $0 < u < 1$

vinden we $f_U(u) = \int_{u-1}^0 dy = 1 - u$. Daarom:

$$f_U(u) = \begin{cases} u + 1, & -1 < u < 0; \\ 1 - u, & 0 \leq u < 1; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (b) $\mathbb{E}W = \mathbb{E}(XY + Y^2) = \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}Y^2 = \mathbb{E}Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y^2$, want X en Y onafhankelijk. We weten dat $\mathbb{E}X = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}Y = -\frac{1}{2}$ en $\mathbb{E}Y^2 = \int_{-1}^0 y^2 dy = \frac{1}{3}$. Dus $\mathbb{E}W = \frac{1}{12}$.
- (c) Omdat X en Y onafhankelijk zijn, is de simultane kansdichtheid van X en Y het product van de marginales. Dus $f_{X,Y}$ is 1 op de verzameling $(0, 1) \times (-1, 0)$ in het vlak en 0 daarbuiten. Merk op dat de waardenverzameling van V de halve lijn $(-\infty, 0)$ is. Kies $a < 0$. Dan $\mathbf{P}(V \leq a) = \mathbf{P}(Y \leq aX)$ en dit is het oppervlak van de figuur die je vindt door $\{(x, y) \mid y \leq ax\}$ te doorsnijden met $(0, 1) \times (-1, 0)$. (Tekenen even!) Je vindt dan dat het uitmaakt of $a < -1$ dan wel $a > -1$. Door de lengte van rechthoekszijden te bepalen: als $a < -1$ vind je 1 en $-\frac{1}{a}$ en als $-1 \leq a < 0$ dan $-a$ en 1, krijgen we

$$F_V(a) = \begin{cases} -\frac{1}{2a}, & a < -1; \\ 1 + \frac{1}{2}a, & -1 \leq a < 0; \\ 1, & 0 \leq a. \end{cases}$$

3. (a) De waardenverzameling van X is $W_X = (0, \infty)$. Voor $x > 0$ krijgen we $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{x/2}^{\infty} e^{-y} e^{x/2} dx = e^{-x}$. Voor $x \leq 0$ is $f_X(x) = 0$.
De waardenverzameling van Y is $W_Y = (0, \infty)$. Voor $y > 0$ krijgen we $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_0^{2y} e^{-y} e^{x/2} dx = 2e^{-y} - 2e^{-2y}$. Voor $y \leq 0$ is $f_Y(y) = 0$.
- (b) X en Y zijn afhankelijk omdat de waardenverzameling van (X, Y) niet rechthoekig is.
- (c) Voor $x > 0$ geldt:

$$f_Y(y \mid X = x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{-y + \frac{x}{2}}, & \frac{x}{2} < y; \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Dan

$$\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y \mid X = x) dy = \int_{x/2}^{\infty} y e^{-y} e^{\frac{x}{2}} dy = 1 + \frac{x}{2}.$$

- (d) $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = 2 \int_0^{\infty} y e^{-y} dy - \int_0^{\infty} y 2e^{-2y} dy = 2 \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
 $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = x) f_X(x) dx = \int_0^{\infty} (1 + \frac{x}{2}) e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{2} + 1$.

We gebruiken herhaald de verwachting en totale kans van de exponentiële verdelingen.