
Normering:

$1a : 2$; $2a : 2$; $3a : 2$; $4a : 2$;
 $b : 1$; $b : 2$; $b : 3$; $b : 2$;
 $c : 2$; $c : 1$; $c : 1$;
 $d : 2$; $d : 2$;
 $e : 2$;
 $f : 1$.

Eindcijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{3}$.

Rekenmachines mogen niet worden gebruikt. Decimale benadering van breuken wordt niet gevraagd. Uitdrukkingen als bijvoorbeeld 7^{37} mogen in antwoorden verder onuitgewerkt blijven.

1. We wijzen blindelings een reëel getal tussen 1 en 4 aan. Zoals bekend, kunnen we dat getal dan zien als een stochastische variabele X met een (continu-)homogene verdeling op het interval (1,4).

- (a) Geef een kansdichtheid f_X en de verdelingsfunctie F_X van X . Schets van beide functies de grafiek.
(b) Bepaal de verwachting $\mathbb{E}X$ van X .

De stochastische variabele Z wordt gedefinieerd door $Z = \sqrt{X}$.

- (c) Bereken met de substitutieregel (en zonder een kansdichtheid van Z te bepalen) de verwachting $\mathbb{E}Z$ van Z .
(d) Bereken $\text{Var}Z$.
(e) Bepaal de verdelingsfunctie van Z .
(f) Toon aan dat Z absoluut-continu verdeeld is en bepaal een kansdichtheid van Z .

Z.O.Z.

2. Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Zij $\mathcal{E}_n$ het experiment waarbij blindelings *met teruglegging* n maal een bal wordt getrokken uit een bak V_n met 5 witte en n zwarte ballen. Zij X_n het aantal witte ballen dat wordt getrokken in het experiment.

- (a) Wat voor een verdeling heeft X_n ? (Geef de naam en parameter(s).) Uitleg wordt niet gevraagd bij dit onderdeel.
- (b) Bepaal $\mathbf{P}(X_5 = 3)$, $\mathbf{E}X_5$ en $\mathbf{P}(X_{20} = 2)$.
- (c) Waarom is $\frac{1}{2}(\frac{24}{5})^2 e^{-\frac{24}{5}}$ een goede benadering van $\mathbf{P}(X_{120} = 2)$?
- (d) Bewijs dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 2) = \frac{25}{2} e^{-5}$.

3. Laat X een absoluut-continu verdeelde stochastische variabele zijn met kansdichtheid f gegeven door

$$f(x) = c|x|e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad [x \in \mathbb{R}],$$

voor een zekere $c > 0$. Zij verder $Y = |X|$.

- (a) Toon aan dat $c = \frac{1}{2}$.
 - (b) Bereken $\mathbf{E}Y$.
4. Zij (X, Y) een discreet verdeelde stochastische vector met kansdichtheid $p_{X,Y}$ gegeven door

$$p_{X,Y}(m, n) = \begin{cases} c(\frac{1}{2})^{mn}, & m \in \{1, 2, 3\}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat $c = \frac{21}{31}$.
- (b) Bepaal de marginale kansdichtheid van Y .
- (c) Bereken $\mathbf{P}(X - Y = 1)$.