

1.

- a. (Plaatje van een parabool met de ruimte erboven gearceerd.)
 b. Voor iedere vaste $x \in \mathbb{R}$ is $f(x, y) = 0$ voor $y \leq x^2$. Derhalve geldt:

$$f_X(x) = \int f(x, y) dy = \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} dy = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Dit is de dichtheid van de $N(0, \frac{1}{2})$ -verdeling.

- c. $f_Y(y|X=x) = f(x, y)/f_X(x) = e^{-(y-x^2)}, \quad y > x^2$.
 d. $\mathbb{E}(Y|X=x) = \int y f_Y(y|X=x) dy = \int_{x^2}^{\infty} y e^{-(y-x^2)} dy = 1 + x^2$. De laatste stap volgt door partiele integratie, of zonder rekenwerk door op te merken dat Y gegeven $X=x$ verdeeld is als $Z + x^2$ voor een standaard exponentieel verdeelde stochastische grootheid Z .
 e. $\mathbb{E}Y = \int \mathbb{E}(Y|X=x) f_X(x) dx = \mathbb{E}(1 + X^2) = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$, want $\mathbb{E}X^2 = \text{var } X = \frac{1}{2}$.

2.

- a. Laat $X_1, \dots, X_{144}$ de gewichten van 144 aselekt gekozen eieren. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_{144}) &= \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_{144} = 144 * 100, \\ \text{var}(X_1 + \dots + X_{144}) &= \text{var } X_1 + \dots + \text{var } X_{144} = 144 * 4. \end{aligned}$$

- b. Voor iedere c geldt dat

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{144} \geq c) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_{144} - 14400}{120} \geq \frac{c - 14400}{120}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{c - 14400}{12 * 2}\right). \end{aligned}$$

Gelijkstellen van de rechterzijde aan 0.95, geeft met gebruikmaking van de tabel, dat

$$\frac{c - 14400}{12 * 2} = -1.64.$$

Dus $c = 14400 - 1.64 * 12 * 2 \approx 14360$.

- c. Centrale Limietstelling: Laat $X_1, X_2, \dots$ onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen met eindige variantie $\sigma^2 = \text{var } X_i$ en verwachting $\mathbb{E}X_i = \mu$. Dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$ dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) \rightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds.$$

3.

- a. Gebruikmakend van de convolutieformule vinden we dat, voor $z \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= \mathbb{P}(Z = z) = \sum_x p_X(x)p_Y(z-x) \\ &= \sum_{x=0}^z \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^x \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{z-x} \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^z \sum_{x=0}^z \left(\frac{3}{4} * \frac{4}{1}\right)^x \\ &= \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^z \frac{3^{z+1} - 1}{3 - 1}. \end{aligned}$$

Voor $z \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ is $p_Z(z)$ gelijk aan 0.

- b. De afbeelding $x \mapsto x^2$ is 1-1 op de positieve getallen. Dus

$$p_W(w) = \mathbb{P}(W = w) = \mathbb{P}(Z^2 = w) = p_Z(\sqrt{w}) = \frac{3}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{w}} \frac{3^{\sqrt{w}+1} - 1}{3 - 1},$$

voor $\sqrt{w} \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Voor andere w , dat wil zeggen $w \notin \{0, 1, 4, 9, \dots\}$, nemen we $p_W(w) = 0$.

4.

- a. De lift stopt niet op de 10de verdieping dan en alleen dan als alle 10 personen op een van de verdiepingen $1, 2, \dots, 9$ uitstappen. De personen kiezen, onafhankelijk van elkaar, ieder een verdieping $1, 2, \dots, 9$ met kans $9/10$. De gevraagde kans is de kans op de doorsnede van de 10 (onafhankelijke) eventualiteiten gedefinieerd als: de i de persoon stapt uit op een verdieping $1, 2, \dots, 9$. De gevraagde kans is daarom $(9/10)^{10}$.
- b. Definieer X_i door $X_i = 0$ als de lift niet stopt op de i de verdieping en $X_i = 1$ anders. Dan is $X = X_1 + \dots + X_{10}$. Bij a) is berekend dat $\mathbb{P}(X_{10} = 1) = (9/10)^{10}$. Vanwege symmetrie geldt dat $\mathbb{P}(X_i = 1) = (9/10)^{10}$ voor iedere $i = 1, \dots, 10$. Derhalve is $\mathbb{E}X_i = 0 * \mathbb{P}(X_i = 0) + 1 * \mathbb{P}(X_i = 1) = (9/10)^{10}$ voor iedere i , en $\mathbb{E}X = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_{10} = 10 * (9/10)^{10}$.

5.

- a. (De schets laat een plaatje zien van de functie $y = z/x^2$ met de ruimte daaronder in het eerste kwadrant rechts van de lijn $x = 1$ gearceerd.)
- b. Voor $z > 0$ vinden we, gebruikmakend van de schets bij a),

$$1 - F_Z(z) = \mathbb{P}(X^2 Y > z) = \int_1^\infty \int_{z/x^2}^\infty e^{-x^2 y} dy dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} e^{-z} dx = e^{-z}.$$

Dit is 1 min de verdelingsfunctie van de standaard exponentiële verdeling.

- c. $\mathbb{E}(X^2 Y)^2 = 2$, het tweede moment van de standaard exponentiële verdeling, te berekenen met tweemaal partieel integreren of, gebruikmakend van resultaten uit het dictaat, als $\text{var } Z + (\mathbb{E}Z)^2 = 1 + 1 = 2$.

d.

$$\mathbb{E}e^{Z-X-Y} = \iint e^{x^2 y - x - y} f(x, y) d(x, y) = \int_1^\infty \int_0^\infty e^{-x} e^{-y} dy dx = e^{-1}.$$