

1.

- a. Er geldt dat $\mathbb{E}U_1^2 = \int_0^1 u^2 du = 1/3$. Volgens de wet van de grote aantallen geldt daarom dat $Y_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n U_i^2 \rightarrow 1/3$ met kans 1. Dus $c = 1/3$.
- b. Er geldt dat $\text{var} U_1^2 = \int_0^1 u^4 du - (\mathbb{E}U_1^2)^2 = 1/5 - 1/9 = 4/45$. Vanwege de centrale limietstelling geldt dat, voor grote n , $Y_n - c$ bij benadering normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie $n^{-1} \text{var} U_1^2 = 4/(45n)$. Laat Z_n normaal verdeeld zijn met verwachting 0 en variantie 4/45. Dan lossen we eerst op

$$0.01 = \mathbb{P}(|Z_n - c| > 0.01) = 2(1 - \Phi(0.01/\sqrt{4/(45n)})).$$

Dit geeft $0.01/\sqrt{4/(45n)} \approx 2.58$, ofwel $n \approx (2.58)^2 * 4/45 * 10000 \approx 5917$. Voor nog grotere n neemt de kans af. Voor deze grote n geeft de centrale limietstelling een uitstekende benadering en dus geldt ook dat $0.01 > \mathbb{P}(|Y_n - c| > 0.01)$ voor $n \approx 5917$ of groter.

- c. Wet van de Grote Aantallen: Laat $U_1, U_2, \dots$ onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met eindige verwachting μ . Dan geldt dat $n^{-1} \sum_{i=1}^n U_i \rightarrow \mu$ als $n \rightarrow \infty$ met kans 1.

Centrale Limietstelling: Laat $U_1, U_2, \dots$ onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische variabelen met eindige verwachting μ en eindige variantie σ^2 . Dan geldt dat $\mathbb{P}(n^{1/2} \sum_{i=1}^n (U_i - \mu) \leq x) \rightarrow \Phi(x/\sigma)$ als $n \rightarrow \infty$, voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

2.

- a. Voor $y > 1$ geldt $f_Y(y) = \int f(x, y) dx = 1/(3y^4)$. Hierbij maken we gebruik van het feit dat

$$\int \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/y^2} dx = 1$$

voor iedere $y > 0$. Voor $y \leq 1$ nemen we de kansdichtheid van Y gelijk aan 0.

- b. Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ and $y > 1$ geldt

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/y^2}.$$

Als functie van x is dit de dichtheid van de normale verdeling met verwachting 0 en variantie y^2 . Dus gegeven $Y = y$ is X normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie y^2 .

- c. Op grond van b) is $\mathbb{E}(X^2|Y = y)$ het tweede moment van de $N(0, y^2)$ -verdeling. Dit is y^2 (som van variantie en verwachting in het kwadraat. (Alternatief: $\mathbb{E}(X^2|Y = y) = \int x^2 f_{X|Y=y}(x) dx$. Dit is uit te rekenen door eenmaal partieel te integreren en de gelijkheid in a) te gebruiken.)

d.

$$\mathbb{E}X^2 = \int \mathbb{E}(X^2|Y = y) f_Y(y) dy = \int_1^\infty y^2 \frac{1}{3y^4} dy = \frac{1}{3}.$$

3.

Vanwege de onafhankelijkheid van X en Y wordt de (simultane) kansdichtheid van Y gegeven door $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

a. Vanwege de convolutieformule geldt, voor $u > 0$,

$$f_U(u) = \int f_X(x)f_Y(u-x) dx = \int_0^u xe^{-x}e^{-(u-x)} dx = \int_0^u xe^{-u} dx = \frac{1}{2}u^2e^{-u}.$$

Voor $u < 0$ nemen we de dichtheid van U gelijk aan 0.

b. Voor $v \geq 0$ vinden we

$$\begin{aligned} 1 - F_V(v) &= \iint_{(x,y): y/x > v} f(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_{xv}^\infty xe^{-x}e^{-y} dy dx \\ &= \int_0^\infty xe^{-x}e^{-xv} dx = \frac{1}{(1+v)^2}. \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid volgt na partiële integratie, of na substitutie van $x(1+v) = z$ uit de gelijkheid $\int_0^\infty ze^{-z} dz = 1$. Dus $F_V(v)$ stijgt van 0 in 0 tot 1 in ∞ op continu-differentieerbare wijze. De dichtheid van V is daarom de afgeleide

$$f_V(v) = F'_V(v) = \begin{cases} 0, & \text{als } v < 0, \\ \frac{2}{(1+v)^3}, & \text{als } v > 0. \end{cases}$$

c. $\mathbb{E}W = \mathbb{E}(YX + Y^2) = \mathbb{E}Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y^2 = 1 * 2 + (1 + 1^2) = 4$. In de tweede gelijkheid gebruiken we dat $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$ vanwege de onafhankelijkheid van X en Y . In de derde gelijkheid gebruiken we dat $\mathbb{E}Y^2 = \text{var } Y + (\mathbb{E}Y)^2$.