

1. (a) $\mathbb{P}(X_2 < \frac{X}{2}) = \mathbb{P}(Y_1 < -\log 2) \approx \Phi(-0.7) \approx 0.2420$. (Preciezer antwoord 0.241086.)
- (b) $\sum_{i=1}^n Y_i = \log\left(\prod_{i=1}^n \frac{X_i}{X_{i-1}}\right) = \log \frac{X_n}{X_0}$. (De factoren vallen tegen elkaar weg.)
Vanwege de onafhankelijkheid en de normaliteit is $\sum_{i=1}^n Y_i$ normaal verdeeld met verwachting $n * \frac{1}{2}$ en variantie $n * 1$. Dus
 $\mathbb{P}(X_{100} > 2X_0) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{100} Y_i > \log 2) = 1 - \Phi(\log 2 - \frac{25}{\sqrt{10}}) \approx 0.9924$.
- (c) Het antwoord op b) is nog steeds zinvol vanwege de Centrale Limietstelling. Deze garandeert dat $\sum_{i=1}^n Y_i$ bij benadering normaal verdeeld is zodra $Y_1, Y_2, \dots$ onafhankelijk en identiek verdeeld zijn met eindige variantie.
- (d) We hebben dat $\frac{X}{X_1} = e^{Y_2}$.

$$\frac{\mathbb{E}X_2}{X_1} = \mathbb{E}e^{Y_2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^y \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y-1)^2/2} e^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \sqrt{e}$$

Merk op dat we het kwadraat hebben afgesplitst in de exponent en gebruiken dat $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y-\mu)^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy = 1$ voor iedere μ (dichtheid van de normale verdeling).

- (e) $\mathbb{E}\frac{X_2}{X_1} = \mathbb{E}e^{Y_2} = \mathbb{E}e^{Y_2 - \mu + \mu} = \sqrt{e}e^{\mu}$, want $Y_2 - \mu$ is nu standaard normaal verdeeld als de Y_2 in d).

2. (a) Voor $y = 1, 2, \dots$ geldt dat

$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x, y) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x!} y^x e^{-2y} (e - 1) = e^y e^{-2y} (e - 1) = e^{-y} (e - 1) =$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{y-1} \left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

We kunnen hierin een geometrische verdeling met parameter $p = 1 - e^{-1}$ herkennen. De verwachting van Y is dan inderdaad $\frac{1}{p}$ zoals gegeven.

- (b) Voor $x = 0, 1, 2, \dots$

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)} = \frac{1}{x!} e^{-y} y^x.$$

Dus gegeven $Y = y$ is X Poisson verdeeld met parameter y .

- (c) De verwachting van een Poisson-verdeling is de parameter, dus vanwege b) $\mathbb{E}[X | Y = y] = y$.
- (d) $\mathbb{E}X = \sum_y \mathbb{E}[X | Y = y] p_Y(y) = \sum_{y=1}^{\infty} y p_Y(y)$. Dit is precies $\mathbb{E}Y$ en dus $\frac{1}{1-e^{-1}}$ vanwege a).

3. Vanwege de onafhankelijkheid wordt de simultane dichtheid van (X, Y) gegeven door $f_X(x)f_Y(y)$. Dit is $e^{-x}2e^{-2y}$ voor $x > 0$ en $y > 0$, en is 0 anders.

- (a) Vanwege de convolutieformule geldt, voor $u > 0$,

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(u-x)dx = \int_0^u e^{-x}2e^{-2(u-x)}dx = 2e^{-2u}(e^u - 1).$$

Voor $u < 0$ nemen we de dichtheid gelijk aan 0.

- (b) Voor $v > 0$ geldt

$$F_V(v) = \mathbb{P}(V \leq v) = \mathbb{P}(Y \leq X|v) = \int_0^{\infty} \int_{y/v}^{\infty} e^{-x}2e^{-2y}dxdy =$$

$$\int_0^{\infty} e^{y/v}2e^{-2y}dy = \frac{2v}{1+2v}.$$

Dit is een continu differentieerbare functie op $[0, \infty)$ stijgend van 0 in 0 tot 1 in ∞ . De dichtheid is daarom gelijk aan de afgeleide en dus gelijk aan $\frac{2}{(1+2v)^2}$.

- (c) $\mathbb{E}W = \mathbb{E}X(X+Y) = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}XY = \mathbb{E}X^2 + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, vanwege de onafhankelijkheid. Hier $\mathbb{E}X^2 = \text{var } X + (\mathbb{E}X)^2 = 1 + 1$. Invullen geeft $\mathbb{E}W = 2 + 1 * \frac{1}{2} = 2.5$.