

1.

- a. De verdelingsfunctie F_X is continu (ook in $x = -1, 0, 1$) en is continu-differentieerbaar (zelfs in $x = -1, 0, 1$ hoewel dat niet direct te zien is en voor het argument niet nodig). De kansdichtheid van X is daarom de afgeleide van F_X en wordt gegeven door

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{als } x < -1 \text{ of } x \geq 1, \\ 1+x, & \text{als } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & \text{als } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- b. $EX = \int x f_X(x) dx = 0$, zoals volgt na invullen en uitrekenen of onmiddellijk uit de symmetrie van f_X rond 0. Uiteraard hebben we eerst vastgesteld dat de oppervlakte onder $x \mapsto |x|f_X(x)$ eindig is (triviaal want continue functie op een eindig interval), zodat de verwachting bestaat.
- c. $EX^2 = \int x^2 f_X(x) dx = \int_{-1}^0 x^2(1+x) dx + \int_0^1 x^2(1-x) dx = 1/6$, na een eenvoudige berekening. Dan is $\text{var } X = EX^2 - (EX)^2 = 1/6$.
- d. Aangezien $-1 \leq X \leq 1$ met kans 1, geldt dat $Y = X^2 \in [0, 1]$ met kans 1. Voor $0 \leq y \leq 1$ geldt dat $P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) = 1 - (1 - \sqrt{y})^2$.
- e. $EY = EX^2 = 1/6$.

2.

- a. Het probleem vertaalt in een vaas met twee typen ballen: loten onder de 400 en loten boven de 400. Daaruit trekken we 4 loten met terugleggen. De verdeling van het aantal loten van een bepaald type is hypergeometrisch. De gevraagde kans is

$$\frac{\binom{400}{k} \binom{600}{4-k}}{\binom{1000}{4}}.$$

De bijbehorende verwachting is 4 keer de kans op een gunstig lot bij de eerste trekking: $4 * 400/1000 = 8/5$.

- b. Het probleem is hetzelfde als bij (a), maar nu met terugleggen. Dus vinden we de binomiale verdeling. De verwachting is hetzelfde, maar de kans verandert in

$$\binom{4}{k} (400/1000)^k (600/1000)^{4-k}.$$

De variantie is $4 * (400/1000) * (600/1000) = 24/25$.

- c. De grootte X is negatief binomiaal verdeeld. De kansdichtheid is

$$p_X(x) = \binom{x-1}{399} (2/5)^{400} (3/5)^{x-400}, \quad x = 400, 401, 402, \dots$$

De verwachting is $400 * (1/(2/5)) = 1000$ en de variantie is $400 * (3/5) * (1/(2/5)^2) = 1500$. De kans dat de 1000ste student de 400ste plaats krijgt toegewezen is $p_X(1000)$.

3.

- a. Dit is een Poisson kans op het punt 2 bij parameter $\lambda = 4$. Dus $e^{-4}4^2/2!$.
- b. De voorwaardelijke verdeling van X gegeven dat K & C is gekozen en er n fouten in de boekhouding zitten nemen we binomiaal met parameters n en $1/2$. Het aantal fouten is Poisson verdeeld met parameter $\lambda = 4$. De voorwaardelijke verdeling van X gegeven dat K & C is gekozen is dan Poisson verdeeld met parameter $1/2 * 4 = 2$, volgens een stelling uit het dictaat (uitdunningsprincipe). Volgens dezelfde redenering is de voorwaardelijke verdeling van X gegeven dat K BV is gekozen Poisson met parameter $3/4 * 4 = 3$.
- c. Laat A de eventualiteit dat K & C is gekozen.

$$P(X = k) = P(X = k|A)P(A) + P(X = k|A^c)P(A^c) = e^{-2}2^k/k!(1/2) + e^{-3}3^k/k!(1/2).$$

- d. De verwachting van een Poisson verdeelde grootte is gelijk aan de parameter. Dus $EX = E(X|A)P(A) + E(X|A^c)P(A^c) = 2 * (1/2) + 3 * (1/2) = 5/2$.

4.

Laat L de lengte van een plaat.

- a. $P(L < 10 - k/100) = P((L - 10)/0.01 \leq -k) = P(Z \leq -k)$, voor Z een standaard normaal verdeelde stochastische grootte. Voor $k = 1, 2, 3$ geeft de tabel de waarden 0.1587, 0.0228, 0.0013.
- b. $P(|L - 10| < 0.005) = P(|Z| < 0.5) = 0.3829$.

5.

- a. Uit $\sum_m \sum_n p_{X,Y}(n, m) = 1$ vinden we $(1/6) + (1/6) + (1/6) + (1/12) + (1/12) + (1/24) = 1/a$ of wel $a = 24/17$.
- b. $p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y) = \sum_{x \leq y \leq 3} (1/2)^x (1/3)a$. Dit is $1/2 * a$, $1/6 * a$, $1/24 * a$ voor $x = 1, 2, 3$, ofwel $12/17, 4/17, 1/17$.
- c. $p_Y(y) = (1/6) * a, (3/12) * a, (7/24) * a$, voor $y = 1, 2, 3$, ofwel $4/17, 6/17, 7/17$.