

1.

- Het waardenbereik is een halve cirkel. We laten de schets hier achterwege.
- Uit de relatie $\int_W f(x, y) dx dy = 1$, waarbij W het waardenbereik is, vinden we (oppervlakte W) $c = 1$, ofwel $c = 2/\pi$.
- Voor $-1 < x < 1$ vinden we $f_X(x) = \int f(x, y) dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2/\pi) dy = (2/\pi)\sqrt{1-x^2}$. Voor $|x| \geq 1$ nemen we $f_X(x) = 0$.
- Voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $f_X(x) = f_X(-x)$. Derhalve is X symmetrisch verdeeld. Op grond hiervan (en het feit dat $\mathbb{E}|X| \leq 1 < \infty$, zodat $\mathbb{E}X$ bestaat) geldt $\mathbb{E}X = 0$.
- We vinden dat

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X\sqrt{Y}) &= \iint x\sqrt{y}f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2/\pi)x\sqrt{y} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 (2/\pi)(2/3)(1-x^2)^{3/4}x dx = 0,\end{aligned}$$

waarbij de laatste stap volgt uit symmetrie.

- Op grond van e) geldt dat $\text{var}(X\sqrt{Y}) = \mathbb{E}X^2Y$. Door dit op dezelfde manier uit te schrijven als bij e) vinden we dat $\mathbb{E}X^2Y = \int_{-1}^1 (\pi/2)x^2 \frac{1}{2}(1-x^2) dx = (\pi/3)$.
 - De variabelen X en Y zijn niet onafhankelijk. Dit volgt bijvoorbeeld uit het feit dat $f(x, y) = 0$ op het gebied $\{(x, y): |x| < 1, 0 < y < 1, (x, y) \notin W\}$, terwijl $f_X(x)f_Y(y) \neq 0$ voor $|x| < 1$ en $0 < y < 1$.
2. Laat X_i de dikte van de i de willekeurig gekozen dominosteen en laat Y de lengte van de doos.
- De variabele $Z = \sum_{i=1}^{20} X_i - Y$ is normaal verdeeld met verwachting $20(1) - 20.5 = -0.5$ en variantie $20(0.1) + 0.25 = 2.25$. Derhalve geldt dat $\mathbb{P}(Z < 0) = \Phi((0 - (-0.5))/\sqrt{2.25}) = \Phi(1/3) \approx 0.63$. Het antwoord is $1 - 0.63 = 0.37$.
 - Laat Y nu normaal verdeeld met verwachting μ en variantie 0.25 . Dan is Z normaal verdeeld met verwachting $20 - \mu$ en variantie 2.25 . Nu lossen we μ op uit $0.99 = \Phi((20 - \mu)/\sqrt{2.25})$. Dit geeft $(20 - \mu) = 2.3263(1.5)$ of $\mu \approx 23.5$. De doos moet dus ongeveer 3 cm langer zijn.
 - Het antwoord uit a) heeft nog waarde omdat we vanwege de centrale limietstelling kunnen verwachten dat $\sum_{i=1}^{20} X_i$ ongeveer normaal verdeeld is, en derhalve is Z ook ongeveer normaal verdeeld.

3.

(Het oorspronkelijke tentamen bevatte een typfout. We maken de som met $p(x, y) = (3/5)(\frac{1}{2})^{xy+1}$.)

- Voor $x \in \{1, 2\}$ wordt de kansdichtheid van X wordt gegeven door

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{3}{5} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x \right)^y \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^x}.$$

- Voor $x \in \{1, 2\}$ geldt

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \sum_y y \mathbb{P}(Y=y|X=x) = \sum_{y=0}^{\infty} y \frac{p(x, y)}{p_X(x)} = \sum_{y=0}^{\infty} y \frac{\left(\left(\frac{1}{2} \right)^x \right)^y}{\frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^x}}.$$

Met gebruikmaking van de aanwijzing op de teller, geeft dit $(\frac{1}{2})^x / (1 - (\frac{1}{2})^x)$.

c. Er geldt dat

$$\mathbb{E}Y = \sum_x \mathbb{E}(Y|X=x)p_X(x) = \sum_{x \in 1,2} \frac{(\frac{1}{2})^x}{1 - (\frac{1}{2})^x} \frac{3}{10} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^x} = \frac{11}{15}.$$

d. Er geldt dat $p_Z(z) = \mathbb{P}(Z=z) = \sum_x \mathbb{P}(X=x, XY=z) = \mathbb{P}(X=1, Y=z) + \mathbb{P}(X=2, Y=z/2)$. Voor z een oneven natuurlijk getal is de tweede kans 0 en dus $p_Z(z) = \mathbb{P}(X=1, Y=z) = (3/5)(\frac{1}{2})^{z+1}$. Voor z een even natuurlijk getal of $z=0$ geldt dat $p_Z(z) = (3/5)(\frac{1}{2})^{z+1} + (3/5)(\frac{1}{2})^{z+1} = (3/5)(\frac{1}{2})^z$. Voor $z \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ is $p_Z(z) = 0$.

4.

- a. De keus welke in overeenstemming is met “aselect gekozen” is de homogene verdeling en dan wel op het interval $[0, 10]$.
- b. Er geldt dat $Y = g(X)$ voor g de functie met $g(x) = x$ als $x \leq 5$ en $g(x) = 10 - x$ als $x \geq 5$. Dan is $\mathbb{E}Y = \int g(x) f_X(x) dx = \int_0^{10} g(x) \frac{1}{10} dx = 2\frac{1}{2}$. De laatste stap volgt door uitrekenen, of door uit een schets af te lezen dat de oppervlakte onder g gelijk is aan 25. (De grafiek van g is een driehoek.)
- c. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y = 5 + 2\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

5. Zie het tentamen van juni 1999.