

Dit tentamen is voor studenten BWI, Econometrie en Wiskunde. Studenten BWI en Econometrie maken sommen 1, 2, 3 en 4. Studenten Wiskunde maken sommen 1, 2, 3 en 5. Studenten met een dubbele studierichting waaronder Wiskunde maken het Wiskunde tentamen.

U krijgt de beschikking over een tabellenboekje. Het gebruik van rekenmachines is niet toegestaan.

1. De stochastische vector (X, Y) is absoluut continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}}, & \text{als } y > x^2, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

- a. Laat zien dat X normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie $\frac{1}{2}$.
 - b. Laat zien dat een marginale dichtheid van Y wordt gegeven door $2\sqrt{y}e^{-y}/\sqrt{\pi}$ voor $y > 0$.
 - c. Voor gegeven x bepaal een voorwaardelijke kansdichtheid van Y gegeven $X = x$.
 - d. Voor gegeven x bepaal $\mathbb{E}(Y | X = x)$.
 - e. Bepaal $\mathbb{E}Y$.
2. De levensduur van een artikel kan worden gelijk gesteld aan het minimum $X = \min(Y, Z)$ van de levensduren Y en Z van twee onderdelen. We veronderstellen dat Y en Z onafhankelijk zijn en exponentieel verdeeld met parameters 1 en 2.
 - a. Bepaal een kansdichtheid van X .
 - b. Welke waarden bezitten $\mathbb{E}X$ en $\text{var } X$?

We veronderstellen dat de levensduren van een partij van 100 artikelen kunnen worden beschouwd als onafhankelijke stochastische grootheden met dezelfde kansverdeling als X . We definiëren S als de som van deze levensduren.

 - c. Bepaal $\mathbb{E}S$ en $\text{var } S$.
 - d. Bepaal een benadering voor de kans dat S groter is dan 110/3.
 - e. Welke bekende kansverdeling bezit S ? Geef een toelichting op uw antwoord, zonder rekenwerk.
 3. We voeren een rij identieke experimenten uit, onafhankelijk van elkaar, waarbij ieder experiment drie mogelijke uitkomsten bezit, genaamd A, B en C, optredend met kansen 1/4, 1/2 en 1/4. Nummer de experimenten met 1, 2, 3, etc. We definiëren X , Y en Z als het nummer van het eerste experiment met uitkomst, respectievelijk, A, B en C.
 - a. Wat is de marginale verdeling van X ?
 - b. Bepaal $\mathbb{P}(X = 4, Y = 10)$.
 - c. Bepaal een kansdichtheid voor (X, Y) .
 - d. Zijn X en Y onafhankelijk?
 - e. Bepaal een kansdichtheid van $Z = X - Y$.

(ZOZ)

4. (Alleen voor BWI en Econometrie.) De stochastische vector (X, Y) is absoluut continu verdeeld met kansdichtheid

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x^2 y}, & \text{als } x > 1, y > 0 \\ 0, & \text{als } x \leq 1 \text{ of } y \leq 0. \end{cases}$$

- Maak een schets van de verzameling $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 y \leq z\}$, voor gegeven $z > 0$.
 - Laat zien dat $Z = X^2 Y$ een exponentiële verdeling bezit met parameter 1.
 - Bepaal $\mathbb{E}(X^2 Y)^2$.
 - Bepaal $\mathbb{E}e^{Z-X-Y}$.
5. (Alleen voor Wiskunde.) Laat $\{N(t) : t \geq 0\}$ het Poisson proces zijn met intensiteit 1. Noteer de tijdstippen van de gebeurtenissen met $S_1, S_2, \dots$ en laat $S_0 = 0$. Definieer verder $U_t = t - S_{N(t)}$. Zoals bekend bezit S_k voor $k \geq 1$ de kansdichtheid

$$f_{S_k}(s) = \frac{1}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-s}.$$

- Bepaal $\mathbb{P}(N(t) = 0, U_t > u)$ voor $0 \leq u < t$.
- Bepaal $\mathbb{P}(N(t) = k, U_t > u)$ voor $k \in \mathbb{N}$ en $0 \leq u < t$. Geef een volledig bewijs gebruikmakend van de formule voor f_{S_k} en de definitie van het Poisson proces als vernieuwingsproces, maar zonder te verwijzen naar op het college afgeleide eigenschappen van het Poisson proces.
- Controleer het antwoord op b) door de eventualiteit van b) te herschrijven in termen van geschikte aangroeiingen van $\{N(t) : t \geq 0\}$ en vervolgens bekende eigenschappen van deze aangroeiingen te gebruiken.
- Bepaal met behulp van a) en b) de verdeling van $N(t)$ en de verdelingsfunctie van U_t . Wat is nu $\mathbb{P}(U_t = t)$?
- Bepaal de voorwaardelijke verdeling van U_t gegeven dat $N(t) = k$.

Normering:

1a: 2	2a: 3	3a: 2	4a: 1	5a: 1
1b: 1	2b: 1	3b: 1	4b: 3	5b: 2
1c: 2	2c: 2	3c: 2	4c: 2	5c: 2
1d: 2	2d: 2	3d: 2	4d: 3	5d: 2
1e: 2	2e: 1	3e: 2		5e: 2

Eindcijfer = totaal/4+1