

1.

- a. Voor iedere vaste $x \in \mathbb{R}$ is $f(x, y) = 0$ voor $y \leq x^2$. Derhalve geldt:

$$f_X(x) = \int f(x, y) dy = \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} dy = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Dit is de dichtheid van de $N(0, \frac{1}{2})$ -verdeling.

- b. De dichtheid van Y is 0 voor $y < 0$. Voor iedere vaste $y > 0$ is $f(x, y) \neq 0$ alleen voor $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$. Derhalve is voor $y > 0$

$$f_Y(y) = \int f(x, y) dx = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}} dx = 2\sqrt{y} \frac{e^{-y}}{\sqrt{\pi}}.$$

- c. $f_Y(y|X = x) = f(x, y)/f_X(x) = e^{-(y-x^2)}$, $y > x^2$.
 d. $\mathbb{E}(Y|X = x) = \int y f_Y(y|X = x) dy = \int_{x^2}^{\infty} y e^{-(y-x^2)} dy = 1 + x^2$. De laatste stap volgt door partiele integratie, of zonder rekenwerk door op te merken dat Y gegeven $X = x$ verdeeld is als $Z + x^2$ voor een standaard exponentieel verdeelde stochastische grootheid Z .
 e. $\mathbb{E}Y = \int \mathbb{E}(Y|X = x) f_X(x) dx = \mathbb{E}(1 + X^2) = 1 + \frac{1}{2} = 3/2$, want $\mathbb{E}X^2 = \text{var } X = \frac{1}{2}$.

2.

- a. Voor $x > 0$ geldt $1 - F_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(Y > x, Z > x) = \mathbb{P}(Y > x)\mathbb{P}(Z > x) = e^{-x}e^{-2x} = e^{-3x}$. Dus $f_X(x) = 3e^{-3x}$. Voor $x < 0$ geldt $f_X(x) = 0$.
 b. Volgens a) bezit X een exponentiële verdeling met parameter 3. Verwachting en variantie zijn dus $1/3$ en $(1/3)^2$.
 c. Laat $S = \sum_{i=1}^{100} X_i$ voor $X_1, \dots, X_{100}$ onafhankelijke exponentieel verdeelde stochastische grootheden. Dan geldt $\mathbb{E}S = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}X_i = 100/3$, en, vanwege de onafhankelijkheid, $\text{var } S = \sum_{i=1}^{100} \text{var } X_i = 100 * (1/3)^2$.
 d. Volgens de centrale limietstelling is $(S - \mathbb{E}S)/\sigma(S)$ bij benadering standaard normaal verdeeld. Dus

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S > 110/3) &= \mathbb{P}\left(\frac{S - \mathbb{E}S}{\sigma(S)} > \frac{110/3 - 100/3}{10/3}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{110/3 - 100/3}{10/3}\right) = 1 - \Phi(1) \approx 0.1586. \end{aligned}$$

- e. De som van n onafhankelijke, exponentieel λ verdeelde grootheden is $\text{Gamma}(n, \lambda)$ verdeeld. Dus is S Gamma verdeeld met parameters 100 en 3.

3.

- a. De marginale verdeling van X is de geometrische verdeling met parameter $1/4$, de kans op A . We kunnen de rij experimenten immers reduceren tot een rij Bernoulli experimenten met de uitkomsten A of “niet A ” ($=B+C$) en X is de eerste keer dat A optreedt.
 b. Zie het antwoord op c) met $x = 4$, $y = 10$.
 c. Voor $1 \leq x < y$ treedt de gebeurtenis $\{X = x, Y = y\}$ op dan en slechts dan als de uitkomst van de rij experimenten de vorm heeft

$$C, C, \dots, C, A, AC, \dots, AC, B, ABC, ABC, \dots,$$

waarbij de A op plaats x staat, de B op plaats y , de code AC staat voor “A of C”, en ABC staat voor “A of B of C”. De kans hierop is $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = (1/4)^{x-1}(1/4)(1/2)^{y-x-1}(1/2)$. Voor $1 \leq y < x$ geeft een soortgelijke uitsplitsing de kans $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = (1/4)^{y-1}(1/2)(3/4)^{x-y-1}(1/4)$. Alle andere waarden van (x, y) hebben kans 0.

- d. De grootheden X en Y zijn niet onafhankelijk. Bijvoorbeeld $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 0$, maar $\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) > 0$.
- e. De stochastische grootheid Z neemt alleen gehele waarden aan ongelijk 0. Voor $z > 0$ vinden we

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_y \mathbb{P}(X = z + y, Y = y) = \sum_{y=1}^{\infty} (1/4)^{y-1}(1/2)(3/4)^{z-1}(1/4) = (1/6)(3/4)^{z-1},$$

waarbij we hebben gebruikt dat $\sum_{y \geq 1} (1/4)^{y-1} = 1/(1 - 1/4) = 4/3$. Voor $z < 0$ vinden we

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_y \mathbb{P}(X = z + y, Y = y) = \sum_{y=1-z}^{\infty} (1/4)^{z+y-1}(1/4)(1/2)^{-z-1}(1/2) = (1/3)2^z.$$

(De som is over gehele waarden van y zodanig dat zowel $y \geq 1$ als $z + y \geq 1$, dat wil zeggen $y \geq 1 - z$, en geeft de waarde $\sum_{y=1-z}^{\infty} (1/4)^{z+y-1} = \sum_{i=1}^{\infty} (1/4)^{i-1} = 4/3$.)

4.

- a. De schets blijft hier achterwege.
- b. Voor $z > 0$ vinden we, gebruikmakend van de schets bij a),

$$1 - F_Z(z) = \mathbb{P}(X^2 Y > z) = \int_1^{\infty} \int_{z/x^2}^{\infty} e^{-x^2 y} dy dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{-z} dx = e^{-z}.$$

Dit is 1 min de verdelingsfunctie van de standaard exponentiële verdeling.

- c. $\mathbb{E}(X^2 Y)^2 = 2$, het tweede moment van de standaard exponentiële verdeling, te berekenen met partiële integratie of als de som van variantie en verwachting in het kwadraat.
- d.

$$\mathbb{E}e^{Z-X-Y} = \iint e^{x^2 y - x - y} f(x, y) d(x, y) = \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-y} dy dx = e^{-1}.$$

5. Laat $X_k = S_k - S_{k-1}$.

- a. $\mathbb{P}(N(t) = 0, U_t > u) = \mathbb{P}(S_1 > t, t - S_0 > u) = \mathbb{P}(X_1 > t) = e^{-t}$.
- b. $\mathbb{P}(N(t) = k, U_t > u) = \mathbb{P}(S_k \leq t < S_{k+1}, t - S_k > u) = \mathbb{P}(S_k < t - u, t < S_{k+1}) = \mathbb{P}(S_k < t - u, t < S_k + X_{k+1})$. Gebruikmakend van het feit dat S_k en X_{k+1} onafhankelijk zijn en Gamma en exponentieel verdeeld, kunnen we deze kans schrijven als

$$\begin{aligned} \iint_{(s,x): s < t-u, t < s+x} f_{S_k}(s) e^{-x} d(s, x) &= \int_0^{t-u} \int_{t-s}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-s} e^{-x} dx ds \\ &= \int_0^{t-u} \frac{1}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-s} e^{s-t} ds = \frac{1}{k!} e^{-t} (t-u)^k. \end{aligned}$$

- c. De eventualiteit $\{N(t) = k, U_t > u\}$ kan herschreven worden als $\{S_k < t - u, S_{k+1} > t\} = \{N(t - u) = k, N(t) - N(t - u) = 0\}$. Aangezien de aangroeiingen $N(t - u)$ en $N(t) - N(t - u)$ onafhankelijk en Poisson verdeeld zijn met parameters, respectievelijk $t - u$ en u , is de kans op deze eventualiteit gelijk aan

$$e^{-(t-u)} \frac{1}{k!} (t-u)^k * e^{-u},$$

hetgeen reduceert tot het antwoord van b).

- d. Merk op dat de formule van b) voor $k = 0$ precies het (correcte) antwoord van a) geeft. We kunnen deze formule dus toepassen voor alle $k \geq 0$. Voor $k \geq 1$ vinden we uit b)

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \mathbb{P}(N(t) = k, U_t > 0) = \frac{1}{k!} e^{-t} t^k,$$

aangezien $\mathbb{P}(U_t > 0) = 1$. Bovendien

$$\mathbb{P}(U_t > u) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) = k, U_t > u) = e^{-t} e^{t-u} = e^{-u},$$

geldig voor $u < t$. Uit de definitie van U_t volgt dat $U_t \leq t$ met kans 1. Bovendien geldt dat $(u, \infty) \downarrow [t, \infty)$ als $u \uparrow t$ (dwz: voor alle rijen $u_m \uparrow t$ geldt $(u_1, \infty) \supset (u_2, \infty) \supset \dots$ en $\cap_m (u_m, \infty) = [t, \infty)$). Daarom is $\mathbb{P}(U_t = t) = \mathbb{P}(U_t \geq t) = \lim_{u \uparrow t} \mathbb{P}(U_t > u) = e^{-t}$. De verdelingsfunctie van U_t wordt gegeven door $F_U(u) = 1 - e^{-u}$ voor $0 < u < t$, $F_U(u) = 1$ voor $u \geq t$, en $F_U(u) = 0$ voor $u \leq 0$.

e.

$$\mathbb{P}(U_t > u | N(t) = k) = \frac{\mathbb{P}(U_t > u, N(t) = k)}{\mathbb{P}(N(t) = k)} = \frac{(t-u)^k}{t^k}, \quad 0 < u < t.$$

Voor $u \geq t$ is deze voorwaardelijke kans gelijk aan 0, en voor $u \leq 0$ is de kans 0.