1.

a. Voor $x < 0$ is $f_X(x)$ gelijk aan 0. Voor $x > 0$ geldt

$$f_X(x) = \int_0^\infty f(x,y)\,dy = \frac{-2}{(x+y+1)^3}\Big|_0^\infty = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

b. Vanwege symmetrie geldt dat $f_Y(x) = f_X(x)$. Het is duidelijk dat niet geldt dat $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ voor iedere (x,y). Derhalve zijn X en Y niet onafhankelijk.

c. De voorwaardelijke dichtheid van Y gegeven $X = x$ wordt gegeven door $f_Y(y|\,X = x) = f(x,y)/f_X(x) = 3(x+1)^3/(x+y+1)^4$. Derhalve is

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y\,|\,X = x) &= \int y f_Y(y|\,X = x)\,dy \\ &= 3(x+1)^3 \int_0^\infty \frac{y}{(x+y+1)^4}\,dy \\ &= 3(x+1)^3 \Big(-\frac{}{2(x+y+1)^2} + \frac{(x+1)}{3(x+y+1)^3}\Big)\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{2}(x+1).\end{aligned}$$

d.

$$\mathbb{E}Y = \int \mathbb{E}(Y\,|\,X = x) f_X(x)\,dx = \int_0^\infty \tfrac{1}{2}(x+1)\frac{2}{(x+1)^3}\,dx = 1.$$

2.

a. De vijfde som wordt door geen van de studenten voorbereid dan en slechts dan als iedere student één van de sommen 1,2,3,4 kiest. De kans dat een bepaalde student dit doet is $4/5$. Aangezien de studenten onafhankelijk van elkaar een som kiezen is de gevraagde kans $(4/5)^6$.

b. Definieer stochastische grootheden X_i door $X_i = 1$ als de $i$de som door niemand wordt voorbereid en $X_i = 0$ anders ($i = 1, \ldots, 5$). Dan is $X = \sum_{i=1}^5 X_i$. Nu is $\mathbb{E}X_5 = \mathbb{P}(X_5 = 1) = (4/5)^6$ vanwege het antwoord op a), en vanwege symmetrie geldt dat $\mathbb{E}X_i = (4/5)^6$ voor iedere i. Derhalve geldt dat $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^5 \mathbb{E}X_i = 5(4/5)^6$.

c. Twee bepaalde sommen worden door geen van de studenten voorbereid dan en slechts dan als iedere student één van de drie andere sommen kiest. Analoog aan a) is deze kans $(3/5)^6$.

d. $\mathrm{var}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}\,X_i + \sum\sum_{i\neq j} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$.

e. We vinden dat $\mathrm{var}\,X_i = \mathbb{P}(X_i = 1)\big(1 - \mathbb{P}(X_i = 1)\big)$ en, voor $i \neq j$, $\mathrm{cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}X_iX_j - \mathbb{E}X_i\mathbb{E}X_j = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) - \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$. Met gebruikmaking van de antwoorden van a) en c) en de rekenregel uit d) vinden we dat

$$\mathrm{var}\,X = 5(4/5)^6\big(1 - (4/5)^6\big) + (25-5)\big((3/5)^6 - (4/5)^6(4/5)^6\big).$$

3.

a. Aangezien de som van onafhankelijk normaal verdeelde stochastische grootheden normaal verdeeld is, beschouwen we het totaal gewicht van 10 “op goed geluk gekozen” eieren als een normaal verdeelde stochastische grootheid W. Deze heeft verwachting $10*100 = 1000$ gram en variantie $10*4 = 40$ gram^2. Nu is

$$\mathbb{P}(W \leq 996) = \mathbb{P}\Big(\frac{W-1000}{\sqrt{40}} \leq -\frac{4}{\sqrt{40}}\Big) = \Phi(-2/\sqrt{10}) \approx 0.26.$$

b. Aangezien 144 een groot aantal is beschouwen we het totaal gewicht van een gros als een bij benadering normaal verdeelde stochastische grootheid G. Het getal c vinden we uit

$$0.95 = \mathbb{P}(G \geq c) = \mathbb{P}\Big(\frac{G-144*100}{\sqrt{144*4}} \geq \frac{c-144*100}{\sqrt{144*4}}\Big) \approx 1-\Phi\Big(\frac{c-144*100}{\sqrt{144*4}}\Big).$$

Dit levert de vergelijking

$$\frac{c-144*100}{\sqrt{144*4}} \approx -1.65,$$

of $c \approx 14400 - 24*1.65$.

c. De stelling die we bij b) gebruiken is de Centrale Limietstelling. We veronderstellen dat de gewichten van de 144 eieren kunnen worden opgevat als onafhankelijke identiek verdeelde grootheden. (In de praktijk is dit redelijk als de 144 eieren kunnen worden opgevat als willekeurig gekozen uit een “oneindige” collectie van eieren.) Verder is van belang dat de verwachting en variantie van deze grootheden eindig zijn, maar dit was een gegeven voor de som.

4.

a. De verdelingsfunctie van $Z = \frac{1}{2}Y$ voldoet aan $F_Z(z) = \mathbb{P}(\frac{1}{2}Y \leq z) = F_Y(2z)$. De dichtheid van Z voldoet derhalve aan $f_Z(z) = f_Y(2z)2$ en is gelijk aan 0 voor $z < 0$ en gelijk aan $2e^{-2z}$ voor $z > 0$.

b. Met gebruik van de convolutie formule voor het berekenen van de dichtheid van de som van de onafhankelijke variabelen X en Z vinden we voor $u > 0$

$$f_U(u) = \int f_X(x)f_Z(u-x)\,dx = \int_0^u e^{-x}2e^{-2(u-x)}\,dx = 2e^{-2u}\int_0^u e^x\,dx = 2e^{-u} - 2e^{-2u}.$$

Voor $u < 0$ is de dichtheid gelijk aan 0.

c. De verdelingsfunctie van V voldoet aan $F_V(v) = \mathbb{P}(X \leq v, Y \leq v) = \mathbb{P}(X \leq v)\mathbb{P}(Y \leq v) = (1-e^{-v})^2$, voor $v > 0$. De verdelingsfunctie is 0 voor $v < 0$. Differentiatie van deze functie geeft voor $v > 0$ $f_V(v) = 2(1-e^{-v})e^{-v}$ en voor $v < 0$ de waarde $f_V(v) = 0$. Aangezien F_V continu is en continu differentieerbaar voor $v \neq 0$, is f_V een kansdichtheid voor V. Deze is identiek aan de dichtheid in c): $f_V(v) = f_U(v)$ voor alle $v \in \mathbb{R}$ en dus zijn U en V identiek verdeeld.

d. Omdat de variantie alleen afhangt van de verdeling, geldt $\operatorname{var} V = \operatorname{var} U = \operatorname{var}(X + \frac{1}{2}Y) = \operatorname{var} X + (1/4)\operatorname{var} Y = 5/4$, waarbij we gebruik hebben gemaakt van de onafhankelijkheid van X en Y en $\operatorname{var} X = \operatorname{var} Y = 1$.