

Tentamen Kansrekening I voor Wiskunde

11 februari 2009

Alle onderdelen wegen in principe even zwaar. Motiveer altijd je antwoord.

1. Jan bezit 4 wiskundeboeken, 3 geschiedenisboeken en 2 taalboeken. Hij zet de boeken van links naar rechts op een boekenplank waarbij elke volgorde even waarschijnlijk is.

- (a) Hoeveel mogelijke volgordes zijn er?
- (b) Wat is de kans dat de boeken per onderwerp gegroepeerd staan?
- (c) Wat is de kans dat de eerste drie boeken allemaal over een verschillend onderwerp gaan?

Laat nu X het aantal boeken zijn van eenzelfde soort dat vooraan staat. Als dus bijvoorbeeld de eerste twee boeken wiskundeboeken zijn en het derde boek een taalboek, dan is $X = 2$; als het eerste boek een geschiedenisboek is en het tweede boek een wiskundeboek, dan is $X = 1$.

- (d) Bepaal de kansmassafunctie van X .

2. Een student maakt een multiple-choice tentamen waarbij elke vraag vier mogelijke antwoorden heeft. Als de student het antwoord niet weet kiest hij een willekeurig antwoord. De kans dat de student het antwoord op een vraag weet is $2/3$. Wat is de kans dat de student het antwoord op een goed beantwoorde vraag inderdaad wist?

3. Een groep mensen bestaat uit M mannen en V vrouwen. Verder is gegeven dat m van de mannen roken en dat v van de vrouwen roken (waarbij natuurlijk $m \leq M$ en $v \leq V$). We kiezen een willekeurig persoon uit de groep. A is de gebeurtenis dat deze persoon een man is, en B is de gebeurtenis dat deze persoon rookt. Waar moeten de getallen M, m, V en v aan voldoen opdat A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn?

4. Stel dat X_λ een stochastische grootte is met een Poisson verdeling met parameter λ .

- (a) Als gegeven is dat $P(X_\lambda = 1) = P(X_\lambda = 3)$, bepaal dan λ .
- (b) Laat met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev zien dat

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(X_\lambda > 2\lambda) = 0.$$

Je mag hierbij gebruik maken van het feit dat zowel de verwachting als de variantie van X_λ gelijk is aan λ .

5. Een vaas bevat $R > 0$ rode ballen en $B > 0$ blauwe ballen. We trekken er n ballen uit, *zonder* teruglegging, waarbij $0 \leq n \leq B + R$. Het aantal rode ballen dat we getrokken hebben noemen we X , het aantal blauwe ballen noemen we Y .

- (a) Laat zien dat X en Y alleen onafhankelijk zijn voor $n = B + R$ en $n = 0$.
- (b) Laat zien dat de kansverdeling van X gegeven wordt door

$$P(X = k) = \frac{\binom{R}{k} \binom{B}{n-k}}{\binom{R+B}{n}},$$

voor $k = 0, \dots, R$, en $P(X = k) = 0$ voor alle andere waarden van k . (Bedenk hierbij dat de afspraak is dat $\binom{a}{b} = 0$ als niet geldt dat $0 \leq b \leq a$.)

(c) Laat zien dat $E(X) = nR/(R + B)$. (Hint, schrijf X als $X = \sum_{i=1}^n X_i$ waarbij $X_i = 1$ als de i -de bal rood is, en $X_i = 0$ als de i -de bal blauw is.)

(d) Laat zien dat de verwachting van X niet verandert wanneer we *met* teruglegging zouden trekken.