

Tentamen Kansrekening I voor Wiskunde

18 december 2006, 12.00-14.00.

- Het tentamen bestaat uit 5 opgaven. Er zijn 36 punten te behalen (cijfer = $(4 + \text{aantal punten})/4$).
- Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag sommen en producten van breuken e.d. gewoon laten staan, het is niet verplicht je antwoord steeds zover mogelijk te vereenvoudigen.
- Geef een duidelijke toelichting bij je antwoorden!
- Na de correctie liggen de tentamens ter inzage op het onderwijsbureau.
- Veel succes!

1. Ik heb een doos met veertig ballen. Van deze veertig ballen zijn er tien rood, tien geel, tien blauw en tien zwart. Iedere serie van 10 ballen van dezelfde kleur is genummerd van 1 tot en met 10, zodat de ballen onderling te onderscheiden zijn. Maria pakt achtereenvolgens vier keer een willekeurige bal uit de doos (zonder terugleggen).

(a) (3 punten) Bereken de kans dat op deze vier ballen hetzelfde nummer staat.

(b) (2 punten) Bereken de kans dat deze vier ballen een verschillende kleur hebben.

(c) (2 punten) Bereken de kans dat minstens één van deze vier ballen rood is.

2. Ik heb een doosje met tien batterijen, drie zijn er leeg en zeven zijn er vol. Ik pak twee willekeurige batterijen uit de doos en stop die in mijn CD-speler. De CD-speler zal alleen werken als beide batterijen vol zijn. Vervolgens pak ik nog een batterij uit de doos en die stop ik in mijn wekker. Schrijf A voor de gebeurtenis dat de CD speler niet werkt, en B voor de gebeurtenis dat ik een volle batterij in mijn wekker heb gestopt.

(a) (3 punten) Bereken de kans dat de CD-speler werkt, maar de wekker niet.

(b) (3 punten) Bereken de kans dat minstens één van beide apparaten werkt.

(c) (3 punten) Bereken $P(B|A)$.

3. (5 punten) Bij de uitgang van een winkel wordt met behulp van een detector gecontroleerd of mensen die de winkel verlaten geen artikelen meenemen die niet betaald zijn. De detector hoort een alarmsignaal te produceren als er iemand passeert met onbetaalde artikelen. Uit de statistieken is bekend dat 0,25 % van de bezoekers van de winkel probeert om artikelen mee te nemen zonder te betalen. Verder is bekend dat als iemand de winkel verlaat met onbetaalde artikelen, de detector met kans 0,95 een alarmsignaal produceert. Bij iemand die geen onbetaalde artikelen meeneemt, is de kans 0,005 dat er toch een alarmsignaal afgaat bij het verlaten van de winkel. Iemand passeert het poortje en het alarmsignaal gaat af. Bereken de (conditionele) kans dat hij zijn artikelen wel betaald heeft.

4. Je gooit vier keer met een eerlijke dobbelsteen, de uitkomsten van de afzonderlijke worpen zijn onafhankelijk van elkaar. Laat X het hoogste aantal ogen zijn dat boven komt bij deze vier worpen, Y het aantal keer dat je een even aantal ogen gooit en Z de som van de aantallen ogen van deze vier worpen.

(a) (3 punten) Bereken $F_X(x)$, de (cumulatieve) verdelingsfunctie van X , voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) (2 punten) Bereken $P(X = 3)$.

(c) (2 punten) Bereken de kansmassafunctie van Y . Hoe wordt de verdeling van Y genoemd?

(d) (2 punten) Bereken de kans dat Z even is.

5. (6 punten) Iemand beweert na 1000 worpen met een eerlijke dobbelsteen in totaal 3250 ogen te hebben gegooit. Dit lijkt me weinig, en daarom wil ik met behulp van de ongelijkheid van Chebychev een bovengrens vinden voor de kans dat er na 1000 worpen met een dobbelsteen in totaal 3250 ogen of minder zijn gegooit. Voor $i \in \{1, 2, \dots, 1000\}$ noteren we het aantal ogen dat bij de i de worp bovenkomt met X_i . De som van het aantal ogen kan dan geschreven worden als $S = X_1 + X_2 + \dots + X_{1000}$. De stochasten $X_1, X_2, \dots, X_{1000}$ zijn onafhankelijk en je mag gebruiken dat $\text{Var}(X_i) = 2\frac{11}{12}$. Geef met behulp van de ongelijkheid van Chebychev een bovengrens voor $P(S \leq 3250)$.

Ter herinnering: De ongelijkheid van Chebychev zegt dat als Y een stochast is en $b > 0$ dat dan

$$P(|Y - E(Y)| \geq b) \leq \frac{\text{Var}(Y)}{b^2}.$$