

Tentamen Kansrekening I (W-ech.)

18 december 2003, 10.30-12.30

1. (3 punten) We nemen een gewoon pak van 52 kaarten, en trekken er 5 uit, zonder te kijken. We zeggen dat we een *full house* hebben wanneer de 5 kaarten er 3 van dezelfde soort bevatten, en 2 van een andere soort; bijvoorbeeld 3 heren en 2 achten. Bereken de kans op een full house.
2. (3 punten) Er zitten $n - 1$ witte ballen en 1 rode bal in een vaas. We trekken er achter elkaar k uit, zonder teruglegging. Wat is de kans dat we na afloop de rode bal hebben getrokken?
3. Een vaas bevat 5 witte en 10 zwarte ballen. We gooien nu eerst met een dobbelsteen, en halen vervolgens in één keer precies zoveel ballen uit de vaas als de dobbelsteen aangeeft.
 - (a) (3 punten) Wat is de kans dat we alleen maar witte ballen trekken, gegeven dat we een 3 hebben gegoooid met de dobbelsteen?
 - (b) (3 punten) Wat is de kans dat we alleen maar witte ballen trekken?
 - (c) (3 punten) Wat is de kans dat we een 3 hebben gegoooid, gegeven dat we alleen maar witte ballen hebben getrokken?
4. Er zijn 5 mensen in een kamer die allemaal, onafhankelijk van elkaar, protestant of katholiek zijn. We kunnen er vanuit gaan dat iedereen met kans $1/2$ protestant en met kans $1/2$ katholiek is. Zij X het aantal katholieken.
 - (a) (3 punten) Bepaal de kansmassafunctie van X .
 - (b) (3 punten) Bepaal de verwachting van X .We kiezen nu een willekeurige persoon, en deze blijkt katholiek te zijn. Deze gebeurtenis geven we aan met A .
 - (c) (3 punten) Bereken $P(X = 2|A)$; in woorden, bereken de kans dat er twee katholieken zijn, gegeven het feit dat een willekeurig gekozen persoon katholiek is.
5. Stel dat S een verzameling is die uit n elementen bestaat. We weten dat S dan 2^n deelverzamelingen heeft (inclusief de lege verzameling en S zelf). We kiezen nu één van deze deelverzamelingen, waarbij elke deelverzameling kans 2^{-n} heeft om gekozen te worden. De gekozen deelverzameling noemen we A . Het aantal elementen van A geven we aan met X .
 - (a) (3 punten) Laat zien dat

$$E(X) = 2^{-n} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}.$$

(b) (2 punten) Het aantal elementen van A^c geven we aan met Y . Laat zien dat $X + Y = n$, en dat X en Y dezelfde verdeling hebben.

(c) (2 punten) Gebruik (b) om aan te tonen dat $E(X) = n/2$.

6. We kiezen een willekeurig getal uit de verzameling $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ en noemen het resultaat X .

(a) (3 punten) Bereken $E(X)$.

(b) (3 punten) Bereken $\text{var}(X)$. Hierbij kun je gebruik maken van de formule

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(c) (3 punten) Bereken $P(|X - E(X)| > \frac{1}{3}n)$ en vergelijk dit met de bovengrens voor deze kans die met behulp van de ongelijkheid van Chebyshev verkregen wordt.