

Tentamen Kansrekening I

7 januari 2002

1. De stochastische vector (X, Y) heeft gezamenlijke kansmassafunctie

$$p_{(X,Y)}(i, j) = \frac{c}{10}, \quad \text{voor } 1 \leq i \leq j \leq 4,$$

en $p_{(X,Y)}(i, j) = 0$ elders.

- (a) Laat zien dat $c = 1$.
- (b) Bereken de marginale verdelingen van X en Y .
- (c) Bereken $E(X)$ en $\sigma^2(X)$.
- (d) Zijn X en Y onafhankelijk? Motiveer je antwoord.
- (e) Bepaal $E(XY)$.

2. De stochastische grootheden X en Y zijn onafhankelijk en hebben dezelfde verdeling gegeven door

$$P(X = k) = P(Y = k) = p(1 - p)^{k-1},$$

voor $k = 1, 2, \dots$. We definiëren $Z = X + Y$.

- (a) Bewijs dat $P(X = k + n | X > n) = P(X = k)$. Waarom wordt deze eigenschap *geheugenloosheid* genoemd?
- (b) Laat zien dat $P(Z = z) = (z - 1)p^2(1 - p)^{z-2}$, voor $z = 2, 3, \dots$
- (c) Laat zien dat

$$P(X = k | Z = z) = (z - 1)^{-1},$$

voor $z = 2, 3, \dots$ en $k = 1, 2, \dots, z - 1$.

- (d) Bereken $E(X | Z = z)$.

3. Beschouw een 4 bij 4 ‘schaakbord’ waarop we vier identieke pionnen willekeurig neerzetten.

- (a) Op hoeveel manieren kunnen we dit doen?
- (b) Hoe groot is de kans dat de vier pionnen op een rechte lijn komen te staan? Vergeet hierbij de diagonalen niet.
- (c) Hoe groot is de kans dat geen twee pionnen in dezelfde rij of kolom terechtkomen?

4. Stel er worden drie paardenraces gehouden. Bij elke race wed ik op één paard. De uitslagen van de verschillende races veronderstellen we onafhankelijk. Bij elke race is de kans dat het paard waarop ik wed wint gelijk aan

p . De weddenschap is zodanig dat ik alleen maar win als alle drie paarden hun race winnen, en in dat geval win ik K euro. Als ten minste één paard verliest, dan verlies ik 1 euro.

Laat X_i een stochastische grootte zijn die de waarde 1 aanneemt als mijn paard in de i -de race wint, en gelijk aan 0 als dat niet zo is.

(a) Leg uit dat mijn winst W geschreven kan worden als

$$W = (K + 1)X_1X_2X_3 - 1.$$

(b) Laat zien dat $E(W) = (K + 1)p^3 - 1$.

(c) Wat is de meest eerlijke waarde voor K en waarom?

(d) Bereken $E(W|X_1 = 1)$ voor deze waarde van K , en leg uit waarom deze conditionele verwachting positief is.