

1. (a) Zij V de verzameling van de kruispunten. Dan $\Omega = \{\omega \subset V : \#(\omega) = 3\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, en $\mathbb{P}$ is de homogene kansmaat, dus $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$ voor iedere $A \subset \Omega$. Tenslotte $\#(\Omega) = \binom{9}{3} = 84$
- (b) $\#(B) = 3 \cdot 3 \cdot 3$, omdat er voor ieder van de drie straten drie mogelijke kruispunten zijn om de kamera te plaatsen. Dus $\mathbb{P}(B) = \frac{27}{84} = \frac{9}{28}$.
- (c) Zij D de eventualiteit dat iedere straat en iedere laan precies één kamera bevat. Dan $\#(D) = 3 \cdot 2 \cdot 1$. (Drie keuzen voor het kruispunt op de zuidelijke straat, daarbij twee keuzen voor het kruispunt op de middelste straat en één keuze daarbij voor het kruispunt op de noordelijke straat.) Dus $\mathbb{P}(D) = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$.
- (d) Merk op dat de eventualiteit waar het om gaat precies B^c is. de gevraagde kans is dus $1 - \mathbb{P}(B) = 1 - \frac{9}{28} = \frac{19}{28}$.
- (e) Merk op dat om symmetrieredenen $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)$ en dat $B \cap C = D$. Omdat $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(D) = \frac{1}{14} \neq \left(\frac{9}{28}\right)^2 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ zijn B en C afhankelijk.
2. (a) $\Omega_a = \{K, M\}^3$, $\mathcal{A}_a = \mathcal{P}(\Omega_a)$ en $\mathbb{P}_a$ is discreet homogeen. Met A_k de eventualiteit dat k maal 'munt' optreedt, is

$$\#(A_k) = \binom{3}{k}. \text{ Dus } \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{8} \binom{3}{k}.$$

- (b) Kies $\Omega = \{0, 1, 2, 3\} \times \{z, w\}$. Met $A_k = \{k\} \times \{z, w\}$, de eventualiteit dat k maal 'munt' optreedt, en W de eventualiteit dat een witte bal wordt getrokken nemen we

$$\mathbb{P}(W|A_0) = 0, \quad \mathbb{P}(W|A_1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(W|A_2) = \frac{2}{4}, \quad \mathbb{P}(W|A_3) = \frac{3}{5},$$

en $\mathbb{P}(A_k)$ als bij (a).

$$(c) \mathbb{P}(W) = \sum_{k=0}^3 \mathbb{P}(W|A_k)\mathbb{P}(A_k) = 0 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{31}{80}.$$

- (d) Volgens de formule van Bayes:

$$\mathbb{P}(A_2 | W) = \frac{\mathbb{P}(W|A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(W)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{31}{80}} = \frac{15}{31}.$$

3. (a) $\mathbb{P}(1 < Y < 4) = F(4-) - F(1) = 1 - (1-p)^3 - (1 - (1-p)) = 2p - 3p^2 + p^3$.
 $\mathbb{P}(Y \leq 4) = F(4) = 1 - (1-p)^4$,
 $\mathbb{P}(1 \leq Y) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1) = 1 - F(1-) = 1 - 0 = 1$.
 $\mathbb{P}(Y = 3) = F(3) - F(3-) = 1 - (1-p)^3 - (1 - (1-p)^2) = p(1-p)^2$.
 $\mathbb{P}(Y = \pi) = F(\pi) - F(\pi-) = 0$.

- (b) $X = n$ betekent dat eerst $n - 1$ proeven een mislukking opleveren en de n -de succes geeft. Omdat de proeven onafhankelijk zijn, is de kans op deze eventualiteit gelijk aan het product van het $(n - 1)$ -voudige product van de kans op mislukking met de kans op succes. In formule $\mathbf{P}(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$.
- (c) De waardenverzameling voor X is gelijk aan de verzameling van de natuurlijke getallen. Dus $F(a) = 0$ voor $a < 1$. Zij nu $a \geq 1$. Dan $F(a) = \mathbf{P}(X \leq a) = \sum_{n=1}^k (1 - p)^{n-1}p$, waarbij k het grootste natuurlijke getal is dat kleiner of gelijk aan a is, met andere woorden $k \leq a < k + 1$. Verder

$$\sum_{n=1}^k (1 - p)^{n-1}p = p \sum_{n=1}^k (1 - p)^{n-1} = p \frac{(1 - p)^k - 1}{(1 - p) - 1} = 1 - (1 - p)^k.$$