

1. (a)  $V = \{r_1, \dots, r_4, w_1, w_2, w_3, b_1, b_2\}$  en  $\Omega = \{\omega \subset V : \#(\omega) = 4\}$  en dus bestaat  $\Omega$  uit alle combinaties van 4 uit 9. Daarom  $\#(\Omega) = \binom{9}{4} = 126$  en voor iedere  $A \subset \Omega$  is  $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$ . ( $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ .)

- (b)  $A_r = \{\omega \in \Omega : \omega \subset \{w_1, w_2, w_3, b_1, b_2\}\}$ . Dus  $\#(A_r) = \binom{5}{4} = 5$ . We vinden  $\mathbb{P}(A_r) = \frac{5}{126}$ .

$A_r \cap A_b$  bestaat uit alle trekkingen die geen rode en geen blauwe bal bevatten en daarom uitsluitend bestaan uit witte ballen. Omdat het aantal witte ballen kleiner is dan vier, is  $A_r \cap A_b = \emptyset$ . Dus  $\mathbb{P}(A_r \cap A_b) = 0$ .

- (c)  $B$  bevat alle trekkingen die bestaan uit twee van één kleur en van de andere kleuren ieder één. Dus door respectievelijk te nemen 2 rode, 1 witte, 1 blauwe daarna 1 rode 2 witte en 1 blauwe en tenslotte 1 rode, 1 witte en 2 blauwe zien we dat

$$\#(B) = \binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{2}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{2}$$

en dus  $\#(B) = 6 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 72$ , zodat  $\mathbb{P}(B) = \frac{72}{126} = \frac{4}{7}$ .

- (d) Uit  $\mathbb{P}(A_r) > 0$ ,  $\mathbb{P}(A_b) > 0$  en  $\mathbb{P}(A_r \cap A_b) = 0$  volgt dat  $\mathbb{P}(A_r \cap A_b) \neq \mathbb{P}(A_r)\mathbb{P}(A_b)$  en dus zijn de eventualiteiten  $A_r$  en  $A_b$  afhankelijk.

2. (a) Zij  $\Omega = \{12, 3456\} \times \{r, w\}$ . Definieer  $D_1$  de eventualiteit dat de dobbelsteen 1 of 2 ogen geeft,  $D_2$  de eventualiteit dat de dobbelsteen 3, 4, 5 of 6 ogen geeft. Zij  $R$  de eventualiteit dat een rode bal wordt getrokken. Dan is  $D_1 = \{12\} \times \{r, w\}$ ,  $D_2 = \{3456\} \times \{r, w\}$  en  $R = \{12, 3456\} \times \{r\}$ .

Voor de hand liggend is dat  $\mathbb{P}(D_1) = \frac{1}{3}$ ,  $\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3}$ ,  $\mathbb{P}(R|D_1) = \frac{4}{6}$  en  $\mathbb{P}(R|D_2) = \frac{3}{8}$ .

- (b)  $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|D_1)\mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(R|D_2)\mathbb{P}(D_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{17}{36}$ .

- (c) Gevraagd wordt  $\mathbb{P}(D_1|R^c)$ . Welnu:

$$\mathbb{P}(D_1|R^c) = \frac{\mathbb{P}(D_1 \cap R^c)}{\mathbb{P}(R^c)} = \frac{\mathbb{P}(R^c|D_1)\mathbb{P}(D_1)}{\mathbb{P}(R^c)} = \frac{(1 - \frac{4}{6})\frac{1}{3}}{1 - \frac{17}{36}} = \frac{4}{19}.$$

**Z.O.Z.**

3. (a)  $\Omega = \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, 100\}^2 : i \neq j\}$ , en verder  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$  discreet homogeen, met dus  $\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$  voor iedere  $A \subset \Omega$ . Verder  $\#(\Omega) = \binom{100}{2} 2! = 100 \cdot 99$ .

(b) Volgens het uitsplitsingsprincipe geldt:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_{100}).$$

Bedenk daarbij dat de eventualiteiten  $A_k$  disjunct zijn en als vereniging heel  $\Omega$  hebben. Daar  $B \cap A_k$  bestaat uit alle paren waarvan de eerste  $k$  is en de tweede niet groter is dan  $k - 2$ , zien we dat  $\#(B \cap A_k) = k - 2$  voor  $k \geq 3$ . Dus  $\mathbb{P}(B) = \frac{1+2+3+\dots+98}{9900} = \frac{49}{100}$ .

4. (a)  $\mathbb{P}(1 < Y < 4) = F(4-) - F(1) = \frac{65}{81} - \frac{1}{9} = \frac{56}{81}$ ,  
 $\mathbb{P}(Y \leq 4) = F(4) = 1$ ,  
 $\mathbb{P}(1 \leq Y) = 1 - \mathbb{P}(Y < 1) = 1 - F(1-) = 1 - \frac{1}{81} = \frac{80}{81}$ ,  
 $\mathbb{P}(Y = 3) = F(3) - F(3-) = \frac{65}{81} - \frac{33}{81} = \frac{32}{81}$ ,  
 $\mathbb{P}(Y = \pi) = F(\pi) - F(\pi-) = \frac{65}{81} - \frac{65}{81} = 0$ .

(b) De waardenverzameling voor  $X$  is  $W_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Verder (formule (5.1) uit Hoofdstuk II) weten we dat voor  $k \in W_X$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \frac{2^k}{3^4}.$$

Dus  $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{81}$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{8}{81}$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{24}{81}$ ,  $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{32}{81}$  en  $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{16}{81}$  en dus

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \begin{cases} 0, & a < 0, \\ \frac{1}{81}, & 0 \leq a < 1, \\ \frac{1}{9}, & 1 \leq a < 2, \\ \frac{11}{27}, & 2 \leq a < 3, \\ \frac{65}{81}, & 3 \leq a < 4, \\ 1, & 4 \leq a. \end{cases}$$

Daarom is  $F$  de verdelingsfunctie van  $X$ .

- (c) We berekenen  $\mathbb{P}(X \text{ is oneven}) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{8}{81} + \frac{32}{81} = \frac{40}{81}$ . Dus  $\mathbb{P}(X \text{ is even}) = 1 - \mathbb{P}(X \text{ is oneven}) = \frac{41}{81}$ . We zien dat de kans dat  $X$  oneven kleiner is dan de kans dat  $X$  even is.