

**Tentamen Intro-exact, onderdeel Wiskunde, 19-12-2006, 8.45-10.45**

- 1.(a) (2 punten) Beschouw de figuur in het platte vlak die samengesteld is uit twee driehoeken, namelijk (1:) de driehoek gevormd door  $(0,0)$ ,  $(1,-1)$  en  $(-1,-1)$ , en (2:) de driehoek gevormd door  $(0,0)$ ,  $(1,3)$  en  $(-1,3)$ . Bepaal het aantal symmetrieën van deze figuur, en bepaal voor ieder hoekpunt de baan en stabilisator.
- (b) (1 punt) Dezelfde vragen als bij (a) wanneer de hoekpunten  $(1,-1)$  en  $(-1,-1)$  vervangen worden door respectievelijk  $(1,-3)$  en  $(-1,-3)$ .
2. (2 punten) Geef een figuur in het platte vlak met vier hoekpunten en zes symmetrieën. Bewijs dat er ook echt precies zes symmetrieën zijn.
3. Leg uit waarom de volgende operaties wel of niet mogelijk zijn door draaien aan de kubus van Rubik (naast de aangegeven veranderingen verandert er verder niets aan de kubus):
- (a) (1 punt) Twee hoekblokjes met elkaar verwisselen.
- (b) (1 punt) Twee hoekblokjes blijven op hun plek waarbij de ene een derde slag met de klok mee draait, en de andere een derde slag tegen de klok in.
- (c) (1 punt) Puntspiegelen van alle ribbeblokjes in het centrum van de kubus.
4. Gedurende het college hebben we laten zien dat de kubus van Rubik in 12 banen uiteenvalt. Iets dergelijks gebeurt ook bij het bekende *schuifpuzzeltje*. Dit puzzeltje bestaat uit een 4 bij 4 vierkant waarin 15 genummerde vierkantjes geplaatst zijn, en waarbij het laatste vierkantje leeg is; zie Figuur 1 waarin het lege vakje door een sterretje is aangegeven.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | *  |

Figuur 1: Het schuifpuzzeltje in de beginstand.

We kunnen nu gaan schuiven met de genummerde vierkantjes door de vierkantjes die naast het sterretje staan in de richting van dat sterretje te verschuiven. Deze opgave gaat over de mogelijke configuraties die we door schuiven kunnen verkrijgen, en we doen dit aan de hand van wat we geleerd hebben bij de kubus van Rubik.

Als we het sterretje even vervangen door het getal 16, dan vormt de rij getallen gelezen van linksboven naar rechtsonder een permutatie van de getallen 1 t/m 16. Net als bij de kubus noemen we een paar  $(i, j)$  *goed* als de  $i$  en  $j$  in de juiste volgorde staan, dat wil zeggen dat het kleinste getal eerder in de rij voorkomt dan het grootste getal. Een paar dat niet goed is noemen we *fout*. Als het aantal goede paren even is, dan krijgt de permutatie waarde  $K = +1$ ; als dit aantal oneven is, dan krijgt de permutatie waarde  $K = -1$ .

(a) (1/2 punt) Waarom klapt de waarde van  $K$  om elke keer als we een vierkantje verschuiven?

Bekijk nu de volgende configuratie, die alleen in de positie van 1 en 2 verschilt van Figuur 1.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 2  | 1  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | *  |

Figuur 2: Het schuifpuzzeltje in een andere positie.

(b) (1/2 punt) Bereken de waarde van  $K$  in de permutaties van in Figuur 1 en Figuur 2. Leg uit waarom hieruit volgt dat we Figuur 2 niet uit Figuur 1 kunnen verkrijgen door een even aantal verschuivingen.

(c) (1/2 punt) Leg uit waarom we de configuratie in Figuur 2 niet met een oneven aantal verschuivingen kunnen bereiken uit de beginstand. (Hint: voor de beantwoording van deze vraag is het voldoende om naar de positie van het lege

vierkantje te kijken.)

(d) (1/2 punt) Is de positie in Figuur 3 uit de beginstand te verkrijgen?

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 2  | 1  | 4  | 3  |
| 5  | 10 | 6  | 8  |
| 9  | 7  | 11 | 12 |
| 14 | 13 | 15 | *  |

Figuur 3: Het schuifpuzzeltje in weer een andere positie.