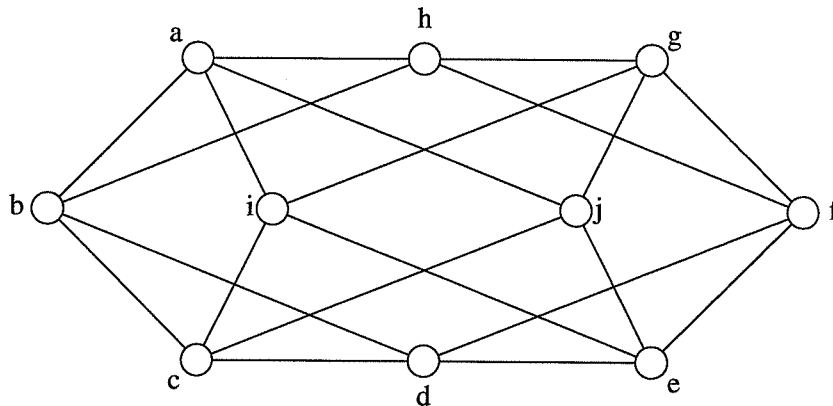


Hoofdtentamen: Inleiding Grafentheorie 26-05-2008

Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet.

1. Het algoritme van Fleury

- (a) Algemene kennis. In deze opgave worden uitsluitend gewone, ongerichte grafen bekeken.
- (i) Wat bedoelt men met een *Euler toer* in een graaf?
 - (ii) Wat is een *brug* in een graaf?
 - (iii) Formuleer de *Stelling van Euler* over Euler toeren in een graaf.
- (b) Geef een korte beschrijving van het *Fleury algoritme* in een algemene Euler graaf (géén voorbeeld).
- (c) Geef een *Euler toer* in de graaf uit de volgende figuur (je mag de kopie na de multiple choice vragen gebruiken om in te leveren). Het uiteindelijke antwoord moet een lijst van punten zijn in wandelvolgorde. Bij keuze, gebruik het alfabetisch eerste punt.



- (d) Er is een unieke tweedelingsgraaf met 6 punten, waarbij twee punten graad 4 hebben en vier punten graad 2 hebben. Ontwerp deze graaf met aandacht voor de uniciteit. Is deze graaf een Euler graaf?

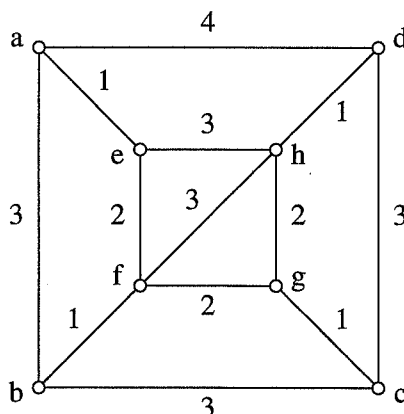
2. Gray codes en Hamilton cyclen op kubus grafen

In deze opgave bekijken we rijtjes van vaste lengte n over het alfabet (de bits) $\{0,1\}$. Deze strings worden gezien als de punten van een n -dimensionale kubus. Een tweetal punten in een dergelijke kubusgraaf is verbonden dan en alleen dan als de bijbehorende strings op precies één plaats verschillen.

- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat is een *Hamilton cykel* in een graaf?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *Hamilton graaf*?
 - (iii) Wat bedoelt men met een n -bits *Gray-code* (n een vast getal ≥ 2)?
- (b) Er bestaat een Hamilton cykel in de 3-dimensionale kubus. Geef zo'n Hamilton cykel aan door de vertices (rijtjes van 3 bits) in volgorde te noemen.
- (c) Er is een methode om een Hamilton cykel te construeren op een n -dimensionale kubus uitgaande van een Hamilton cykel in een $(n-1)$ -dimensionale kubus. Leg de werkwijze uit voor $n=4$, en geef op deze manier een Hamilton cykel in de 4-dimensionale kubus uitgaande van de cykel in onderdeel (b).
- (d) Hoe kom je van de Hamilton cykel uit onderdeel (c) aan een 4-bits *Gray code*?

3. Opspannende bomen en het algoritme van Prim

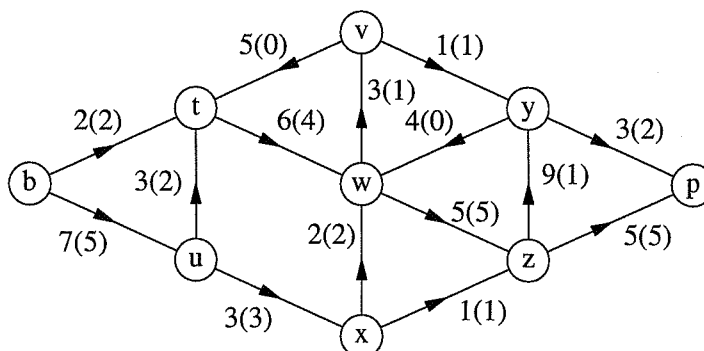
- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat bedoelt men met een *opspannende boom* van een samenhangende graaf?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *minimale opspannende boom* in een gewogen samenhangende graaf?
- (b) Beschrijf het algoritme van *Prim* voor het vinden van een *minimale opspannende boom* in een gewogen samenhangende graaf.
- (c) Bepaal met dit algoritme een *minimale opspannende boom* in de graaf van de afbeelding en geef het *gewicht* van die boom (je mag de kopie na de multiple choice vragen gebruiken om in te leveren).
N.B.: kies bij het uitvoeren van het algoritme steeds het alfabetisch eerste punt dat bruikbaar is.



4. Stromen in netwerken

De stelling over stromen in netwerken van Ford en Fulkerson levert een algoritme op voor het construeren van een maximum stroom én van een bijhorende minimum snede.

- (a) Kennisvragen.
- (i) Wat bedoelt men met een *snede* in een netwerk en met de *capaciteit* van een dergelijke snede?
 - (ii) Wat bedoelt men met een *onverzadigd pad* (ook wel *stroomvergroterend pad* genoemd) in een netwerk, waarop een stroom is gegeven?
 - (iii) Formuleer de stelling van *Ford en Fulkerson*.
- (b) Beschrijf de procedure waarmee in een netwerk een passende *minimum snede* kan worden geconstrueerd bij een maximum stroom.
- (c) Gebruik de methode die je in (b) hebt beschreven om in het volgende netwerk (dat klaarblijkelijk een maximum stroom draagt) een *minimum snede* te vinden.



De figuur is overgenomen na het multiple choice gedeelte; deze kan voor je antwoord worden gebruikt.

Normering

1a: 6	2a: 6	3a: 4	4a: 6	4: 21
b: 3	b: 3	b: 3	b: 3	
c: 7	c: 7	c: 7	c: 7	
d: 4	d: 3			
20	19	14	16	21

(Multiplechoice (7): -4 ptn per fout)

Totaal te behalen = 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

N.B.: Na afloop van dit tentamen kun je op blackboard (Inleiding Grafentheorie, knop "Course Information", folder "Week 22") een attachment vinden met de uitwerking van dit (deel)tentamen. De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Leeg blad ten behoeve van apart inleverbaar multiple choice gedeelte.

5. Multiple choice vragen

- Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.
- Er is per vraag altijd precies één alternatief juist én (meest) volledig.
- Je hoeft géén toelichting te geven bij de antwoorden.

5.1. Een programma kiest een beginpunt in een graaf en herhaalt zolang mogelijk de volgende stap.

"Merk het huidige punt als gebruikt, kies hiervandaan een lijn naar een ongebruikt punt, en maak dit tot huidige punt".

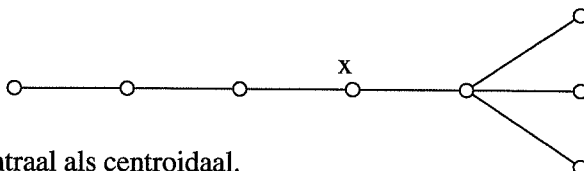
Het programma termineert ...

- o in een eindpunt, dwz: een punt van graad 1.
- o in het beginpunt; we vinden zo een cykel.
- o in een punt waarvan alle burens op het gevolgde pad liggen.
- o ... onvoorspelbaar; het terminatiegedrag hangt af van de gebruikte graaf (samenhangend? boom? Hamilton graaf? ...).

5.2. Zij $n \geq 3$ een natuurlijk getal. Een n -dominospel bevat stenen met op de linker- en rechterhelft een getal van 0 t/m n . Elke cijfercombinatie komt voor en is uniek. Je mag twee stenen aan elkaar leggen met een vak waarop hetzelfde cijfer staat.

- o Je kan volgens deze spelregel een kring leggen waarin alle stenen worden gebruikt.
- o Het lukt niet om volgens deze spelregel een kring te leggen, tenzij $n=6$ zoals in het normale dominospel.
- o Het lukt niet om volgens deze spelregel een kring te leggen, tenzij n even is.
- o Het lukt niet om volgens deze spelregel een kring te leggen, tenzij n oneven is.

5.3. In het volgende plaatje van een 8-punts boom is een punt met 'x' gemerkt.



- o Het punt x is zowel centraal als centroidaal.
- o Het punt x is niet centraal maar wel centroidaal.
- o Het punt x is wel centraal maar niet centroidaal.
- o Het punt x is noch centraal noch centroidaal.

5.4. Met het *Dijkstra algoritme* construeert men

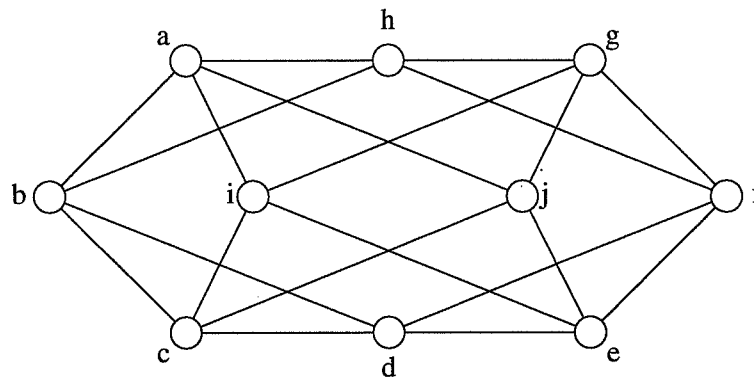
- o een minimum-capaciteit snede in een netwerk.
- o een maximum-stroomsterkte in een netwerk.
- o een minimum-gewicht opspannende boom in een gewogen graaf.
- o een kortste-padenboom in een gewogen graaf.

5.5. De stelling van *Berge-Petersen* zegt:

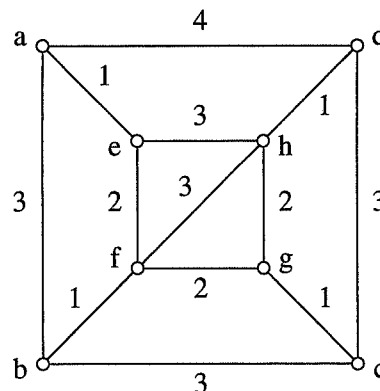
- o Een maximum koppeling komt voort uit een maximum stroom in een aangepast netwerk.
- o Een koppeling F is volledig precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- o Een koppeling F is maximum precies dan als er geen vergrotend F -wisselpad bestaat.
- o Elke twee koppelingen F, F' met $\#F < \#F'$ kunnen in balans worden gebracht door uitwisselen van lijnen.

5.6. Het *burentekort* van een tweedelingsgraaf $G=(V_1, V_2, E)$ is

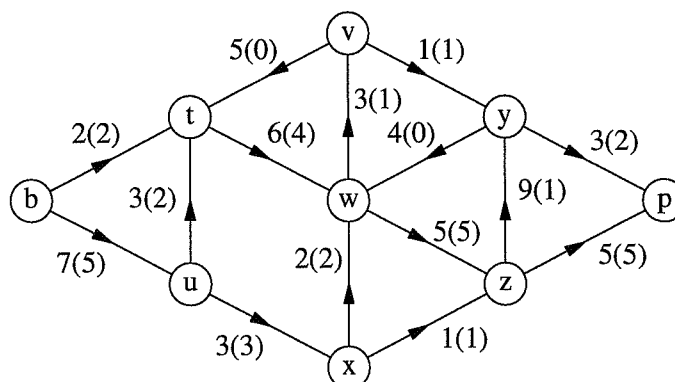
- o Het aantal punten in V_1 dat geen buur heeft in V_2 .
 - o het verschil $\#W - \#B(W)$, gemiddeld over alle W deelverzameling van V_1 .
 - o het grootste positieve verschil $\#W - \#B(W)$ voor W een deelverzameling van V_1 , of 0 als er geen positief verschil is.
 - o het totale aantal punten van de graaf dat niet kan worden toegewezen bij een maximum toewijzing.
- N.B.: als W een collectie vertices is, dan staat $B(W)$ voor de burencollectie van W .



Figuur bij opgave 1c: Euler toer



Figuur bij opgave 3c: Prim algoritme



Figuur bij vraagstuk 4(c): minimum-capaciteit snede