

400035

Tentamen Inleiding Grafentheorie 30-8-2005

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Graden van punten in gerichte en ongerichte grafen.*

- a) In een ongerichte graaf met ten minste twee punten zonder lussen of dubbele lijnen komen twee verschillende punten voor van gelijke graad. Bewijs dit.
- b) In een gerichte graaf is het mogelijk, dat alle graden verschillend zijn. Geef een voorbeeld.
- c) In een gerichte graaf is het mogelijk, dat alle ingraden van de punten verschillend zijn, en tevens ook alle uitgraden van de punten verschillend zijn. Geef een voorbeeld.
- d) Als in een gerichte graaf de ingraden van alle punten verschillend zijn, dan kan het aantal lijnen van de graaf worden uitgedrukt in het aantal punten. Geef de formule met een korte toelichting.

2 *Het teleprinter probleem of de De Bruijn rijen.*

Het is de bedoeling om een kringvormige string te genereren over het alfabet $\{0,1,2\}$ waarin elke string ter lengte 3 precies één keer voor komt als deelstring.

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n kring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren? Hoeveel punten heeft die graaf, hoeveel lijnen? En hoeveel symbolen zitten er in de kring?
- b) Geef een tekening van de graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen. (Graag vrij groot, en zet nummers bij punten en lijnen, zodat de oplossing te controleren is.)

3 *Bomen en tellingen van lijnen, punten en componenten.*

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.

Z.O.Z

- b) Bewijs, dat in een boom het aantal punten V precies 1 meer is dan het aantal lijnen E .
- c) Als tussen elk tweetal punten van een graaf precies één pad bestaat, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.

4 *Opspannende bomen en samenhangende grafen.*

- a) Geef de definitie van een *opspannende boom* van een samenhangende graaf.
- b) Gegeven een samenhangende graaf G , met $n > 1$ punten. Bewijs dat er ten minste twee punten v en w in G zijn, zodat $G-v$ en $G-w$ samenhangend zijn.
- c) Bewijs het volgende gevolg: er is een zodanige ordening $v_1, v_2, \dots, v_n$ van de punten van G , dat $G_1 = G - v_1$, $G_2 = G_1 - v_2$, ..., $G_{n-1} = G_{n-2} - v_{n-1}$ alle samenhangend zijn.
(Informeel uitgedrukt: een samenhangende graaf is punt voor punt af te pellen waarbij in elk stadium de overblijvende graaf samenhangend is.)

NORMERING

1a 4 pt	1d 3 pt	3a 1 pt	4a 1 pt
1b 2 pt	2a 4 pt	3b 3 pt	4b 3 pt
1c 2 pt	2b 4 pt	3c 4 pt	4c 5 pt

Multiple Choice:
1 punt per vraag

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

30-8-2005

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

- 5 Zij $G=(V_1, V_2, E)$ een tweedelingsgraaf en W een deelverzameling van V_1 . Een toewijzing van W in V_2 is
- ☐ een verzameling B van buuren van W zo dat $|B| \geq |W|$.
 - ☐ een koppeling tussen de punten van W en V_2 die alle punten van W verzadigt.
 - ☐ een toekenning van ten hoogste $|W|$ punten uit V_2 aan W .
 - ☐ een koppeling in G die de punten van W onverzadigd laat.
 - ☐ een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van W en V_2 .
- 6 Zij $G=(V, E)$ een graaf. Een Euler ronde in G is gedefinieerd als
- ☐ een cykel die door alle punten van V gaat.
 - ☐ een gesloten wandeling die elke lijn van E ten hoogste één keer aandoet.
 - ☐ een gesloten wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
 - ☐ een wandeling die elk punt van V precies één keer aandoet.
 - ☐ een wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- 7 Een k -reguliere graaf is
- ☐ een gerichte graaf waarin elk punt in- en uitgraad k heeft.
 - ☐ een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht k krijgt.
 - ☐ een graaf met k even grote componenten.
 - ☐ een volledige graaf met k elementen.
 - ☐ een graaf waarin elk punt van graad k is.
- 8 Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf
- ☐ een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een Euler toer te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
 - ☐ een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.

Z.O.Z.

- 9 Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G=(V,E)$ is
- ☐ een boom met dezelfde vertices als G .
 - ☐ een samenhangende deelgraaf van G zonder cykels.
 - ☐ een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsamenhangend maakt.
 - ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
- 10 Met de Dijkstra algoritme construeert men
- ☐ een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.
 - ☐ een minimale padenboom in een gewogen graaf.
 - ☐ een maximale stroom in een netwerk.
 - ☐ een minimale toewijzing in een gewogen graaf.
- 11 De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- ☐ bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
 - ☐ bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
 - ☐ bij iedere stroom een onverzadigd (ongericht) pad van bron naar put bestaat.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
 - ☐ bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
- 12 Een koppeling in een graaf $G=(V,E)$ is gedefinieerd als
- ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zo dat geen vergrotend F -wisselpad bestaat in G .
 - ☐ een verzameling F van extra lijnen zo dat alle componenten van G onderling verbonden worden ("gekoppeld") door lijnen uit F .
 - ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zodat geen twee lijnen uit F een uiteinde gemeen hebben.
 - ☐ een maximale samenhangende deelgraaf van G .
- 13 Een graaf $G=(V,E)$ is een Hamilton graaf als
- ☐ G een gesloten wandeling bevat die elk punt van V aandoet.
 - ☐ G samenhangend is en geen bruggen bevat.
 - ☐ G een cykel bevat die elke lijn van E één keer aandoet.
 - ☐ G een geïnduceerde cykel bevat.
 - ☐ G een opspannende cykel bevat.