

Eerste Deeltentamen Inleiding Grafentheorie 2-5-2005

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 Vier puzzels.

Soms is het mogelijk uit een aantal eigenschappen van een ongerichte graaf deze graaf te construeren, soms zijn er bij een aantal eigenschappen meer grafen mogelijk. Geef een tekening van elk van de mogelijkheden van de gevraagde grafen.

aanwijzing 1: Voor de vier puzzels samen bestaan tien oplossingen.

aanwijzing 2: De grafen van onderdelen c) en d) zijn de *complementaire* grafen van die uit de onderdelen a) en b), d.w.z. we kunnen een c) resp. een d) graaf krijgen door de lijnen van een a) resp. b) graaf weg te laten uit een K_6 . (Zie ook inleiding vraagstuk 3).

- a) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 1, en vier van de punten graad 2 hebben.
- b) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 1, en vier van de punten graad 3 hebben.
- c) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 4, en vier van de punten graad 3 hebben.
- d) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 4, en vier van de punten graad 2 hebben.

2 Een stelling.

- a) Geef de definitie van een *tweedelingsgraaf* (ook wel *bipartiete* graaf genoemd). Geef ook de definitie van een *cykel*.
- b) Bewijs de volgende stelling: *Een oneven gesloten wandeling bevat een oneven cykel*.
- c) Laat zien dat in een tweedelingsgraaf geen cykels van oneven lengte kunnen voorkomen.

d) Bewijs de volgende stelling:

Een graaf is een tweedelingsgraaf, dan en slechts dan als deze graaf geen oneven cykels bevat.

(Merk op dat één deel van het bewijs bij c) al is geleverd. Bewijs het andere deel eerst voor samenhangende grafen, en geef daarna aan hoe de redenering kan worden aangepast voor niet samenhangende grafen.)

3 *Reguliere en complementaire grafen.*

In dit vraagstuk bekijken we uitsluitend ongerichte grafen.

Twee grafen $G_1(V, E_1)$ en $G_2(V, E_2)$ heten *complementair*, als deze grafen dezelfde puntverzameling V hebben, en twee punten in G_1 verbonden zijn, dan en slechts dan als ze in G_2 niet verbonden zijn. Dit betekent dus dat $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, en dat de volledige graaf $K_{|V|} = (V, E_1 \cup E_2)$.

Een graaf heet *regulier* als de graad voor elk punt gelijk is.

- a) De complementaire graaf van een reguliere graaf is zelf regulier. Bewijs dit.
- b) Een samenhangende reguliere graaf met een oneven aantal punten is een Euler graaf. Bewijs dit.
- c) Er zijn precies twee niet isomorfe reguliere grafen op 7 punten met graad 4. Geef de verbindingsmatrices van deze beide grafen.

NORMERING

1a 2 pt	1d 2 pt	2c 3 pt	3b 4 pt
1b 2 pt	2a 2 pt	2d 4 pt	3c 4 pt
1c 2 pt	2b 3 pt	3a 2 pt	

CIJFER

Bij 0,1,2,3 pt: 1 4,5,6 pt: 2 7,8,9 pt: 3 10,11,12 pt: 4 13,14,15 pt: 5,
16,17,18 pt: 6 19,20,21 pt: 7 22,23,24,25 pt: 8 26,27,28 pt: 9 29,30 pt: 10.