

## Tentamen Inleiding Grafentheorie 2-6-2003

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

### 1 *Het teleprinter probleem of de De Bruijn rijen.*

Het is de bedoeling om alle strings ter lengte **4** over het alfabet  $\{0,1\}$  in een cirkeltje te plaatsen, en wel zo, dat elke string in dat cirkeltje precies één keer voor komt.

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n cirkelstring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren? Hoeveel punten heeft die graaf, hoeveel lijnen? En hoeveel symbolen zitten er in de kring?
- b) Geef een tekening van de graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen. (Graag vrij groot, en zet nummers bij punten en lijnen, zodat de oplossing te controleren is.)
- c) Maak een cirkelvormige string die een oplossing is voor dit teleprinter probleem.

### 2 *Bomen en tellingen van lijnen en punten.*

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- b) Bewijs, dat in een boom het aantal punten  $|V|$  precies **1** meer is dan het aantal lijnen  $|E|$ .
- c) Gegeven een samenhangende graaf met  $|V| = |E| + 1$ . Bewijs hieruit dat deze graaf een boom moet zijn.

### 3 *Lijnsamenhang.*

Onder de **lijnsamenhang** van een graaf verstaat men het minimum aantal lijnen waarvan verwijdering de graaf onsamenshangend maakt. Zo bevat een **2-lijnsamenhangende** graaf geen brug, en een **3-lijnsamenhangende** graaf bevat tussen elke twee punten drie disjuncte paden.

- a) Wat kan men zeggen van de graden van de punten van een graaf waarvan de *lijnsamenhang* **k** is?
- b) Wij zoeken een minimale opspannende deelgraaf van de volledige graaf  $K_7$  met *lijnsamenhang* **3**. Wat is het minimale aantal lijnen zo'n deelgraaf? Maak een tekening van zo'n minimale opspannende deelgraaf van  $K_7$ .
- c) Maak een (duidelijke) tekening van de Petersen graaf. (Dit is een reguliere graaf met **10** punten en **15** lijnen waarvan de kleinste cykel lengte **5** heeft). Wat is de *lijnsamenhang* van de Petersen graaf?

Z.O.Z.

- d) Geef een (duidelijke) tekening van een minimale opspannende deelgraaf van de Petersen graaf met *lijnsamenhang 2*.

**Aanwijzing:** Uit eerdere vraagstukken weten we dat de Petersen graaf geen Hamilton cykel heeft. De kleinste mogelijkheid is dan een deelgraaf met **11** lijnen. Een oplossing van dit type blijkt te bestaan, en kan gevonden worden doordat de graden van de punten van de gezochte deelgraaf bekend zijn, en we beginnen bij het puzzelen zoals gebruikelijk met de punten van hoogste graad.

#### 4 Capaciteitsvergroting in een netwerk.

We bestuderen het netwerk dat wordt gegeven door de incidentie lijst in de hiernaast gegeven tabel. De eerste kolom bestaat uit de staarten van de pijlen, de tweede kolom geeft de koppen van de pijlen aan, en de derde kolom de capaciteiten voor ieder pijl.

- a) Welk punt in dit netwerk is de **bron** en welk punt is de **put**?

- b) Maak een duidelijke systematische tekening van dit netwerk met de **bron** links en de **put** rechts. Zet de capaciteiten bij de pijlen.

- c) Bepaal de maximum stroom in dit netwerk, en zet de stroomsterkte ook bij de pijlen van de tekening uit het vorige onderdeel.

- d) Verhoog nu de capaciteit van de pijl van **c** naar **e** met **2** tot **6**, en ga na of de stroom in het netwerk kan worden vergroot, en bepaal weer de maximum stroom. Geef aan met welke snede deze maximum stroom correspondeert.

- e) Verhoog nu bovendien de capaciteit van de pijl van **b** naar **d** met **2** tot **7**, en ga na of de stroom in het netwerk kan worden vergroot. Geef een lijst van stroomvergrotenende paden, totdat de maximum stroom is bereikt. Geef weer aan met welke snede deze maximum stroom correspondeert.

| staart   | kop      | capaciteit |
|----------|----------|------------|
| <b>a</b> | <b>b</b> | <b>9</b>   |
| <b>a</b> | <b>f</b> | <b>1</b>   |
| <b>b</b> | <b>d</b> | <b>5</b>   |
| <b>b</b> | <b>e</b> | <b>3</b>   |
| <b>c</b> | <b>a</b> | <b>7</b>   |
| <b>c</b> | <b>e</b> | <b>4</b>   |
| <b>e</b> | <b>f</b> | <b>6</b>   |
| <b>f</b> | <b>d</b> | <b>6</b>   |

#### NORMERING

Elke goed beantwoorde multiple choice vraag geeft 1 punt.

Voor de overige vragen gelden de volgende puntenaantallen :

|                |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <b>1a 3 pt</b> | <b>2a 1 pt</b> | <b>3a 1 pt</b> | <b>3d 3 pt</b> | <b>4c 2 pt</b> |
| <b>1b 3 pt</b> | <b>2b 3 pt</b> | <b>3b 3 pt</b> | <b>4a 1 pt</b> | <b>4d 2 pt</b> |
| <b>1c 2 pt</b> | <b>2c 4 pt</b> | <b>3c 3 pt</b> | <b>4b 2 pt</b> | <b>4e 3 pt</b> |

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

**Naam:**

**Studierichting en jaar:**

**2-6-2003**

- **Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.**
- **In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.**

1. Welke van onderstaande typen grafen is altijd vlak:

- o Euler grafen.
- o Platonisch grafen.
- o reguliere grafen.
- o grafen die isomorf zijn met de Petersen graaf.
- o Hamilton grafen.

2. Zij  $G=(V,E)$  een graaf. Een Hamilton cykel in  $G$  is gedefinieerd als

- o een cykel die door alle punten van  $V$  gaat.
- o een wandeling die elk punt uit  $V$  precies één keer aandoet.
- o een gesloten wandeling die elk punt uit  $V$  ten hoogste één keer aandoet.
- o een gesloten wandeling die elke lijn van  $E$  precies één keer aandoet.

3. Een graaf  $G=(V,E)$  is een boom als

- o tussen elke twee punten een uniek pad bestaat.
- o  $G$  samenhangend is en punten van graad 1 (dwz: eindpunten) heeft.
- o  $|V|=|E|+1$  en  $G$  een wortel heeft.
- o tussen elke twee punten een kortste pad bestaat.
- o elke lijn uit  $E$  een brug is.

4.

Een graaf  $G=(V,E)$  is een Euler graaf als

- o  $G$  samenhangend is en geen bruggen bevat.
- o  $G$  samenhangend is en elk punt uit  $V$  een even graad heeft.
- o  $G$  een gesloten wandeling bevat die elk punt van  $V$  precies één keer aandoet.
- o  $G$  een open wandeling bevat die elke lijn van  $E$  precies één keer aandoet.
- o  $G$  de graaf is horend bij een regelmatig veelvlak (polyhedron).

5. Een netwerk is

- o een gerichte graaf waarin aan elke pijl een positief getal (de capaciteit) is toegekend.
- o een gerichte gewogen graaf (de gewichten stellen de capaciteit voor).
- o een samenhangende graaf met een bron en put waartussen een stroom loopt.
- o een gerichte graaf waarin aan elke pijl een niet-negatief getal (de stroom) is toegekend.

**Z.O.Z.**

6. Zij  $G=(V_1, V_2, E)$  een tweedelingsgraaf en  $W$  een deelverzameling van  $V_1$ . Een toewijzing van  $W$  in  $V_2$  is

- o een koppeling in  $G$  die de punten van  $W$  onverzadigd laat.
- o een koppeling tussen de punten van  $W$  en  $V_2$  die alle punten van  $W$  verzadigt.
- o een volledige koppeling in de opspannende deelgraaf op de punten van  $W$  en  $V_2$ .
- o een toekenning van ten hoogste  $|W|$  punten uit  $V_2$  aan  $W$ .
- o een verzameling extra lijnen van punten uit  $W$  naar  $V_2$ .

7. De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf  $G=(V_1, V_2, E)$  zegt dat een toewijzing van  $V_1$  in  $V_2$  bestaat enkel en alleen als

- o  $|B(W)| < |W|$  voor elke deelverzameling  $W$  van  $V_1$ .
- o de graad van elk punt uit  $V_1$  tenminste  $|V_2|/2$  is .
- o  $|B(W)| \geq |W|$  voor elke deelverzameling  $W$  van  $V_1$ .
- o  $|V_1| \leq |V_2|$ .

8. Een  $k$ -reguliere graaf is

- o een volledige graaf met  $k$  elementen.
- o een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht  $k$  krijgt.
- o een graaf met  $k$  even grote componenten.
- o een graaf waarin elk punt van graad  $k$  is.
- o een graaf met meervoudige lijnen, waarbij tussen elke twee vertices precies  $k$  lijnen bestaan.

9. De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put

- o een maximumstroom in geen enkele pijl de opgegeven capaciteit overtreft.
- o bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
- o de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
- o bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
- o bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.