



In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Hoge graden en lange cyclen.*

- a) Wat verstaat U onder de **graad** van een punt in een graaf? Wat verstaat U onder een **pad**? Wat is een **cykel** in een graaf? Hoe bepalen we de **lengte** van een **pad** of een **cykel**? Geef de definities.
- b) Gegeven een graaf, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan een getal $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel met lengte ten minste $k + 1$. Geef aan hoe U zo'n cykel zou kunnen vinden.
- c) Bewijs de volgende stelling:
Een oneven gesloten wandeling bevat een oneven cykel.

2 *Drie puzzels.*

Soms is het mogelijk uit een aantal eigenschappen van een graaf deze graaf te construeren. Bij deze puzzels kan op isomorfie na precies één graaf worden gemaakt, die aan de gevraagde eigenschappen voldoet. Geef steeds een incidentielijst van de graaf die aan de eisen voldoet. Label daarbij de punten van de graaf met hoofdletters.

aanwijzing: Begin steeds met een punt van hoogste graad bij het oplossen van de puzzels en het maken van schetsen.

- a) Zoek een graaf met de punten A, B, C, D, E, F, G met de graden $d(A)=5, d(B)=5, d(C)=4, d(D)=3, d(E)=3, d(F)=1, d(G)=1$, en geef de incidentielijst.
- b) Zoek een *tweedelingsgraaf* met de punten H, I, J, K, L, M, N, P met de graden $d(H)=5, d(I)=4, d(J)=4, d(K)=3, d(L)=3, d(M)=3, d(N)=2, d(P)=2$, en geef een incidentielijst.
- c) Zoek een *tweedelingsgraaf* met 10 punten $Q-Z$ met de graden $7, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2$ en geef de incidentielijst.

3

Het splitsen van een punt in het bewijs van de stelling van Euler.

Gegeven is een samenhangende graaf waarin alle punten een even graad hebben. Bij het construeren van een *Euler ronde* kan worden geprobeerd om net zo lang punten te splitsen tot elk punt de graad 2 heeft.

- a) Als we uit gaan van een punt p van graad 4, die verbonden is met de punten q, r, s en t , dan splitsen we p in twee niet verbonden copieën p_1 en p_2 . Hierbij wordt gekozen uit twee alternatieven:

1) Het punt p_1 wordt verbonden met q en r , en het punt p_2 wordt verbonden met s en t .

2) Het punt p_1 wordt verbonden met q en t , en het punt p_2 wordt verbonden met r en s .

Als gegeven is dat deze graaf die gemaakt wordt door splitsing volgens alternatief 1) niet samenhangend is, dan wordt de graaf die ontstaat door splitsing volgens alternatief 2), wel samenhangend.

Bewijs dit.

- b) Geef aan hoe uit het voorgaande onderdeel door generalisatie een bewijs voor de stelling van Euler kan worden geconstrueerd.

NORMERING

1a 3 pt	2a 3 pt	3a 5 pt
1b 4 pt	2b 3 pt	3b 4 pt
1c 4 pt	2c 4 pt	

CIJFER

Bij 0,1,2,3 pt : 1	4,5,6 pt : 2	7,8,9 pt : 3	10,11,12 pt : 4	13,14,15 pt : 5 ,
16,17,18 pt : 6	19,20,21 pt : 7	22,23,24,25 pt : 8	26,27,28 pt : 9	29,30 pt : 10 .