

Tentamen Inleiding Grafentheorie 15-8-2000

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 Vier puzzels.

Soms is het mogelijk uit een aantal eigenschappen van een ongerichte graaf deze graaf te construeren, soms zijn er bij een aantal eigenschappen meer grafen mogelijk. Geef een tekening van elk van de mogelijkheden van de gevraagde grafen.

aanwijzing 1: Voor de vier puzzels samen bestaan tien oplossingen.

aanwijzing 2: De grafen van onderdelen c) en d) zijn de *complementaire* grafen van die uit de onderdelen a) en b), d.w.z. we kunnen een c) resp. een d) graaf krijgen door de lijnen van een a) resp. b) graaf weg te laten uit een K_6 .

- a) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 1, en vier van de punten graad 2 hebben.
- b) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 1, en vier van de punten graad 3 hebben.
- c) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 4, en vier van de punten graad 3 hebben.
- d) Zoek een graaf met zes punten, waarvan twee van de punten graad 4, en vier van de punten graad 2 hebben.

2 Reguliere en complementaire grafen.

In dit vraagstuk bekijken we uitsluitend ongerichte grafen.

Twee grafen $G_1(V, E_1)$ en $G_2(V, E_2)$ heten *complementair*, als deze grafen dezelfde puntverzameling V hebben, en twee punten in G_1 verbonden zijn, dan en slechts dan als ze in G_2 niet verbonden zijn. Dit betekent dus dat $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, en dat de volledige graaf $K_{|V|} = (V, E_1 \cup E_2)$.

Een graaf heet *regulier* als de graad voor elk punt gelijk is.

- a) De complementaire graaf van een reguliere graaf is zelf regulier. Bewijs dit.
- b) Een samenhangende reguliere graaf met een oneven aantal punten is een Euler graaf. Bewijs dit.
- c) Er zijn precies twee niet isomorfe reguliere grafen op 7 punten met graad 4. Geef de verbindingsmatrices van deze beide grafen.

Z.O.Z.

3 Toernooi grafen en Hamilton paden.

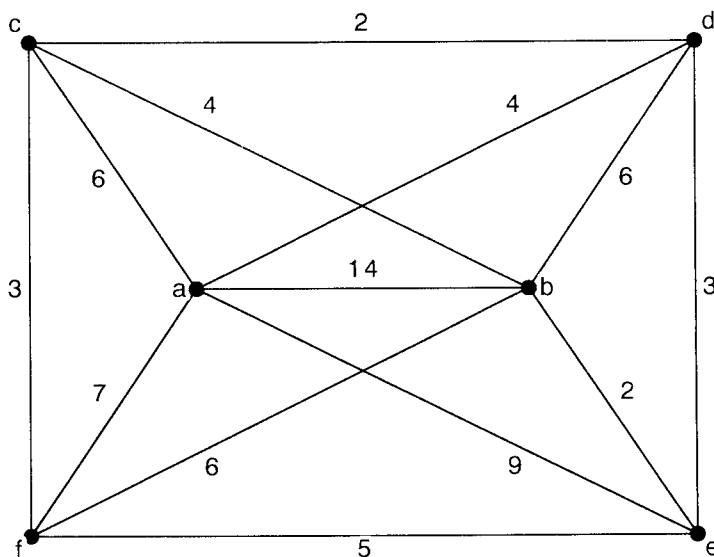
- Geef de definitie van een **toernooigraaf**. Geef de definitie van een **gericht Hamilton pad**.
- Bewijs, dat iedere toernooigraaf een gericht Hamilton pad bevat.

4 Bomen en grafen zonder circuits.

- Wanneer heet een graaf een **boom**? Geef de definitie.
- Als in een graaf tussen elke twee punten **precies** één pad bestaat, dan bevat deze graaf geen circuits. Bewijs dit.
- Als in een samenhangende graaf elke lijn een **brug** is, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.

✖ 5 De algoritme van Dijkstra.

- Beschrijf het kortste pad probleem in een gewogen samenhangende graaf.
- Beschrijf de **algoritme van Dijkstra** voor het kortste pad probleem. Geef daarbij vooral aan welke "registers" worden bijgehouden.
- Pas de algoritme toe op de volgende gewogen graaf en de punten **a** en **b**. Geef hierbij een volledige boekhouding.



NORMERING

1a 2 pt	2a 3 pt	3b 3 pt	5a 4 pt
1b 2 pt	2b 3 pt	4a 2 pt	5b 2 pt
1c 2 pt	2c 3 pt	4b 4 pt	5c 2 pt
1d 2 pt	3a 3 pt	4c 3 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$