

Tentamen Inleiding Grafentheorie 20-3-2000

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Reguliere tweedelingsgrafen.*

- a) Wat betekent het als twee grafen **isomorf** zijn? Geef de definitie. Wat betekent het als een graaf **regulier** van graad **d** is? Geef de definitie. Geef ook de definitie van een **tweedelingsgraaf** (*bipartite graaf*).
- b) Geef een *duidelijke gestructureerde* tekening van alle **samenhangende onderling niet isomorfe reguliere tweedelingsgrafen** op 8 punten.
- c) Geef de **verbindings matix** van elk van de in het vorige onderdeel gevonden **samenhangende onderling niet isomorfe reguliere tweedelingsgrafen**. (Zorg dat de labels van de punten systematisch gekozen worden).

2 *De muis en de kaasblokjes.*

Gegeven is een kubusvormig stuk kaas, dat in $3 \times 3 \times 3 = 27$ blokjes is verdeeld. Een muis eet zich door de kaas heen, door één voor (één in ieder blokje een hol te eten. Hij begint in de linker-voor-onderhoek, en gaat steeds van een blokje naar een ander blokje dat nog niet aangevreten is, en dat met een vol zijvlak aan het vorige blokje grenst. Het is de bedoeling dat de muis in het middelste blokje eindigt.

- a) Vertaal dit probleem in de taal van grafen en Hamilton paden.
- b) Laat zien hoe men soms bij een tweedelingsgraaf direct kan constateren dat er geen Hamilton cykel bestaat.
- c) Er is een stelling die aan geeft wanneer in een graaf een Hamilton cykel bestaat. Geef deze stelling
- d) Ga na of de muis zich op de aangegeven manier door de kaasblokjes heen kan eten, en laat zien waarom het wel kan of waarom het niet kan.

Z.O.Z.

3 *Het handelsreizigers probleem.*

- a) Formuleer het Handelsreizigers Probleem voor gewogen grafen.
 b) Beschrijf de benaderende algoritme van het Handelsreizigers probleem.

- c) Hiernaast is de gewichten matrix voor een volledige graaf G op de punten A, B, C, D, E gegeven. Bepaal de bijhorende afstandsmatrix van G .

–	A	B	C	D	E
A	0	6	4	8	9
B	6	0	3	4	7
C	4	3	0	6	3
D	8	4	6	0	9
E	9	7	3	9	0

- d) Gebruik de benaderende algoritme om het Handelsreizigers Probleem op te lossen in de *afstandsgraaf* van G . Geef de volledige berekening, uitgaande van de cykel $ABCDEA$.
 e) Beschrijf de route afgelegd door de handelsreiziger in de *oorspronkelijke* graaf G , en geef het totale gewicht van deze route.

4 *Bomen en tellingen van lijnen en punten.*

- a) Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
 b) Bewijs, dat in een boom het aantal punten V precies 1 meer is dan het aantal lijnen E .
 c) Gegeven een samenhangende graaf met $|V| = |E| + 1$. Bewijs hieruit dat deze graaf een boom moet zijn.

*5 *Opspannende bomen en de uitwisselings stelling.*

- a) Geef de definitie van een *opspannende boom* van een samenhangende graaf.
 b) Gegeven een samenhangende graaf, en daarop twee opspannende bomen T en T' , dan bestaat er een rij van opspannende bomen $T = T_0, T_1, T_2, \dots, T_k = T'$, waarbij voor elke $i = 1, 2, \dots, k$ geldt dat T_i uit T_{i-1} ontstaat door een lijn van T_{i-1} te wisselen voor een andere.
 Bewijs dit.

NORMERING

1a 3 pt	2b 2 pt	3b 2 pt	4a 2 pt	5b 6 pt
1b 2 pt	2c 3 pt	3c 2 pt	4b 4 pt	
1c 2 pt	2d 3 pt	3d 2 pt	4c 4 pt	
2a 2 pt	3a 2 pt	3e 2 pt	5a 2 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$