



Tentamen Inleiding Grafentheorie 25-3-99

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Een stelling.*

- a) Geef de definitie van een **tweedelingsgraaf** (ook wel *bipartiete* graaf genoemd). Geef ook de definitie van een **cykel**.
- b) Bewijs de volgende stelling: *Een oneven gesloten wandeling bevat een oneven cykel.*
- c) Laat zien dat in een tweedelingsgraaf geen cyclen van oneven lengte kunnen voorkomen.
- d) Bewijs de volgende stelling:
Een graaf is een tweedelingsgraaf, dan en slechts dan als deze graaf geen oneven cyclen bevat.
(Merk op dat één deel van het bewijs bij c) al is geleverd. Bewijs het andere deel eerst voor samenhangende grafen, en geef aan hoe de redenering kan worden aangepast voor niet samenhangende grafen.)

Het teleprinter probleem of de De Bruijn rijen.

Het is de bedoeling om alle strings ter lengte **4** over het alfabet $\{0,1\}$ in een cirkeltje te plaatsen, en wel zo, dat elke string in dat cirkeltje precies één keer voor komt.

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n cirkelstring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren?
- b) Geef een tekening van de gerichte graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen.
- c) Maak een cirkelvormige string die een oplossing is voor dit teleprinter probleem.

3 *Een algorithm voor het handelsreizigers probleem.*

- a) Geef de definitie van het **handelsreizigers probleem**. Aan welke eisen moet een **afstanden matrix** voldoen? Wat bedoelt men in dat verband met de **driehoeks ongelijkheid**? Is de onderstaande matrix een echte afstanden matrix? Licht dit toe.

Z.O.Z.

- b) In het dictaat staat een benaderend algoritme van het handelsreizigers probleem. Geef dit algoritme.
- c) Ga uit van de rechts gegeven matrix en van de cykel A B C D E A. Ga door een aantal malen het algoritme uit b) toe te passen zoeken naar verkorting van de cykel. Geef de uiteindelijke cykel die niet meer wordt verbeterd, en de totale afstand van deze cykel.

	A	B	C	D	E
A	0	13	9	7	11
B	13	0	15	5	18
C	9	15	0	16	3
D	7	5	16	0	17
E	11	18	3	17	0

4 *Bomen en takken.*

- a) Als in een boom precies één punt van graad 3 bestaat, en geen punten van hogere graad, dan heeft die boom precies 3 eindpunten. Bewijs dit.
- b) Zoek de kleinste boom met één punt van graad 4, waarvoor de componenten die ontstaan door verwijdering van dat punt alle vier verschillend zijn. (Dit vraagstuk is geïnspireerd op het principe van stereo-isomerie in de zoals dat voor komt in de koolstof chemie.)

5 *Opspannende bomen en de uitwisselings stelling.*

- a) Geef de definitie van een *opspannende boom* van een samenhangende graaf.
- b) Gegeven een samenhangende graaf, en daarop twee opspannende bomen T en T' , dan bestaat er een rij van opspannende bomen $T = T_0, T_1, T_2, \dots, T_k = T'$, waarbij voor elke $i = 1, 2, \dots, k$ geldt dat T_i uit T_{i-1} ontstaat door een lijn van T_{i-1} te wisselen voor een andere.
- Bewijs dit.

NORMERING

1a 2 pt	2a 2 pt	3b 4 pt	5a 2 pt
1b 3 pt	2b 4 pt	3c 3 pt	5b 6 pt
1c 2 pt	2c 3 pt	4a 3 pt	
1d 4 pt	3a 3 pt	4b 4 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$