



In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *De verbindings matrix.*

In dit vraagstuk bekijken we uitsluitend ongerichte grafen.

aanwijzing: Begin steeds met een punt van hoogste graad bij het tekenen.

- a) Hoe ziet de verbindings matrix er uit in het geval van een volledige graaf? Geef als voorbeeld de matrix van K_6
- b) Van een graaf met zeven punten is gegeven, dat punt 1 en punt 2 de graad 6 hebben, dat punt 3 en punt 4 de graad 5 hebben, dat punt 5 en punt 6 de graad 4 hebben, en dat punt 7 de graad 2 heeft. Teken deze graaf en geef de verbindings matrix.
- c) Teken een graaf met zes punten, waarvan twee punten van graad 2, één punt van graad 3, twee punten van graad 4, en één punt van graad 5.

2 *Het teleprinter probleem of de De Bruijn rijen.*

Het is de bedoeling om alle strings ter lengte 4 over het alfabet $\{0,1\}$ in een cirkeltje te genereren, en wel zo, dat elke string in dat cirkeltje precies één keer voor komt.

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n cirkelstring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren?
- b) Geef een tekening van de graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen.
- c) Maak een cirkelvormige string die een oplossing is voor dit teleprinter probleem.

3 *Gray codes en Hamilton cykels op kubus grafen.*

In deze opgave bekijken we steeds strings van vaste lengte over het alfabet $\{0,1\}$. Deze strings worden gezien als de punten van een (*hyper*)kubusgraaf. Een tweetal punten in deze kubusgrafen is verbonden dan en alleen dan als de bijbehorende strings op precies één plaats verschillen.

- a) Er bestaat een Hamilton cykel in de kubus graaf op de strings ter lengte 3 over $\{0,1\}$. Geef zo'n Hamilton cykel aan.

- b) Uitgaande van deze kubusgraaf kunnen wij ook op de hyperkubusgraaf met als punten alle strings ter lengte **4** ook een Hamilton circuit construeren. Geef dit circuit en beschrijf de constructie.
- c) Voor ieder natuurlijk getal $n \geq 2$ bestaat er op de op de hyperkubusgraaf, waarvan de punten genummerd zijn met strings ter lengte n een Hamilton cykel. Toon dit aan.



4 Bomen en grafen zonder circuits.

- a) Wanneer heet een graaf een **boom**? Geef de definitie.
- b) Als in een graaf tussen elke twee punten **precies** één pad bestaat, dan bevat deze graaf geen circuits. Bewijs dit.
- c) Als in een samenhangende graaf elke lijn een **brug** is, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.

5 Opspannende bomen en algorithmen.

Gegeven een samenhangende graaf, met op de lijnen een gewichtsfunctie met als waardengebied de positieve reële getallen, en waarbij de gewichten op alle lijnen verschillend zijn. Wij vergelijken het algoritme van **Dijkstra** voor de kortste paden boom met het algoritme van **Prim** voor de minimale opspannende boom.

- a) Geef de definitie van een **opspannende boom** van een samenhangende graaf.
- b) Geef een korte beschrijving van het algoritme van **Dijkstra**.
- c) Geef een korte beschrijving van het algoritme van **Prim**.
- d) Het is mogelijk dat bij hetzelfde beginpunt de algorithmen van **Dijkstra** en **Prim** een verschillende boom opleveren. Bedenk een kleine gewogen graaf, met een aangewezen beginpunt, waarvoor dit het geval is.

NORMERING

1a 2 pt	2b 2 pt	3c 4 pt	5a 2 pt
1b 3 pt	2c 3 pt	4a 2 pt	5b 2 pt
1c 3 pt	3a 1 pt	4b 4 pt	5c 2 pt
2a 4 pt	3b 3 pt	4c 4 pt	5d 4 pt

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$