

tentamen formele structuren  
30 maart 2007

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

**Opgave 1.**

- (i) We definiëren  $A = [0, \rightarrow)$ , oftewel:  $A$  bevat alle reële getallen vanaf 0.  
Geef een bijectie tussen  $A$  en  $A \cup \{-1\}$ .

(5 punten)

- (ii) We definiëren  $B = [0, 1]$  en  $C = [-2, -1] \cup [1, 2)$ .  
(Het gaat hier om intervallen van reële getallen.)

Bewijs dat  $B$  en  $C$  gelijkmachting zijn.

(5 punten)

- (iii) Neem het onderstaande schema over:

|                                      | $X \cup Y$ | $X \setminus Y$ | $X \times Y$ |
|--------------------------------------|------------|-----------------|--------------|
| $X$ aftelbaar, $Y$ aftelbaar         |            |                 |              |
| $X$ overaftelbaar, $Y$ aftelbaar     |            |                 |              |
| $X$ overaftelbaar, $Y$ overaftelbaar |            |                 |              |

en geef in de lege hokjes aan welk van de volgende vier gevallen geldt voor de betreffende verzameling:

- E : de verzameling is eindig (mag leeg zijn)  
A : de verzameling is aftelbaar oneindig  
O : de verzameling is overaftelbaar  
? : je kunt het niet weten; het hangt van  $X$  en  $Y$  af

(5 punten)

**Opgave 2.**

Gegeven is het deductief systeem over het alfabet  $\Sigma = \{a, b\}$  met één axioma:

$b$

en drie afleidingsregels:

$$\frac{x}{ax} \text{ (R1)} \quad \frac{x}{xb} \text{ (R2)} \quad \frac{x \quad y}{xy} \text{ (R3)}$$

- (i) Geef een afleiding van de string  $bbabb$ .

(5 punten)

- (ii) Is de string *bbaba* afleidbaar?  
 Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.  
 (5 punten)
- (iii) Is het systeem beslisbaar?  
 (5 punten)

**Opgave 3.** Deze opgave gaat over talen over  $\{0, 1\}$ .

- (i) Geef een DEA (deterministische eindige automaat) voor de taal bestaande uit alle strings waarin op elke 1 een 0 volgt.  
 (5 punten)
- (ii) Geef een reguliere expressie voor de taal bestaande uit alle strings waarvan het aantal 1-en oneven is.  
 (5 punten)
- (iii) We definiëren  $L$  als de taal bestaande uit alle strings waarvoor geldt dat het aantal 0-en precies 5 groter is dan het aantal 1-en.  
 Bewijs dat  $L$  niet regulier is.  
 (5 punten)

**Opgave 4.**

- (i) Geef de transitietabel van een Turing Machine die het eerste symbool van een string weghaalt en op de plek van het tweede symbool zet. De Turing Machine verandert strings van minder dan twee symbolen niet.  
 (5 punten)
- (ii) Bekijk de Turing Machine gedefinieerd door de volgende transitietabel:

|       |   |   |     |        |
|-------|---|---|-----|--------|
| $q_0$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_0$ | 0 | 0 | $R$ | $q_0$  |
| $q_0$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |
| $q_1$ | — | — | $R$ | reject |
| $q_1$ | 0 | 0 | $R$ | reject |
| $q_1$ | 1 | 1 | $R$ | $q_2$  |
| $q_2$ | — | — | $R$ | accept |
| $q_2$ | 0 | 0 | $R$ | reject |
| $q_2$ | 1 | 1 | $R$ | $q_1$  |

De starttoestand is  $q_0$  en de enige accept-toestand is accept.

- (a) Wordt de string 011 geaccepteerd?  
 (b) Wordt de string 0111 geaccepteerd?  
 (c) Welke taal wordt geaccepteerd?  
 (5 punten)

**Opgave 5.** Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie.

Hier zijn  $a$ ,  $b$ , en  $c$  atomaire acties.

Zijn de volgende vergelijkingen geldig in PA? Zo ja, geef een afleiding in PA.

Zo nee, laat zien dat de bijbehorende grafen niet bisimilaair zijn.

(i)  $a \parallel bc = (a \parallel b)c$

(5 punten)

(ii)  $ab \parallel b = (a \parallel b)b$

(5 punten)

**Opgave 6.** Deze opgave gaat over PA, dus zonder communicatie.

Ook hier zijn  $a$  en  $b$  atomaire acties.

(i) Bepaal een oplossing als procesgraaf van het proces  $X$  gegeven door:

$$\begin{aligned} X &= aY \\ Y &= (b + ab)X + b \end{aligned}$$

(5 punten)

(ii) Bepaal een oplossing als procesgraaf van het proces  $U$  gegeven door:

$$\begin{aligned} U &= aV + ab \\ V &= (b + ab)U \end{aligned}$$

(5 punten)

(iii) Zijn de processen  $U$  en  $V$  bisimilaair? Leg uit waarom (niet).

(5 punten)

**Opgave 7.** Deze opgave gaat over ACP, dus met communicatie.

Gegeven is:

|                      |                       |
|----------------------|-----------------------|
| atomaire acties      | $a, a', a^*, b$       |
| communicatie functie | $\gamma(a, a') = a^*$ |
| 'halve acties'       | $H = \{a, a'\}$       |

(i) Teken de procesgraaf van  $ab \parallel (a + a')$   
(dus het cartesisch product van  $G(ab)$  en  $G(a + a')$ ,  
met daaraan toegevoegd de communicatiepijlen).

(5 punten)

(ii) Teken het  $\delta$ -schone overblijfsel  $\Delta_H(G_c(ab \parallel (a + a')))$ .

(5 punten)

*Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.*

### De axioma's van de procesalgebra

- (A1)  $x + y = y + x$
- (A2)  $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3)  $x + x = x$
- (A4)  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5)  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  
- (A6)  $x + \delta = x$
- (A7)  $\delta \cdot x = \delta$
  
- (CF1)  $a \mid b = \gamma(a, b)$  als  $\gamma(a, b)$  gedefinieerd
- (CF2)  $a \mid b = \delta$  als  $\gamma(a, b)$  niet gedefinieerd
  
- (CM1)  $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2)  $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3)  $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4)  $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5)  $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6)  $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7)  $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8)  $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9)  $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$
  
- (D1)  $\partial_H(a) = a$  als  $a \notin H$
- (D2)  $\partial_H(a) = \delta$  als  $a \in H$
- (D3)  $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4)  $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$