

tentamen formele structuren
7 juni 2005

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven.

Opgave 1.

- (a) We definiëren $G = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N} \text{ en } n^2 > 50\}$.
- (i) Geef een bijectie $f : \mathbb{N} \rightarrow G$.
 - (ii) Geef een bijectie $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.
 - (iii) Geef een bijectie $k : \mathbb{Z} \rightarrow G$.
- (5 punten)
- (b) Geef drie oneindige verzamelingen A , B , en C zo dat geen twee ervan gelijkmachtig zijn; licht je antwoord toe.
- (5 punten)
- (c) Bewijs dat de intervallen $[3, 5]$ en $(0, 4)$ gelijkmachtig zijn.
- NB: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ en $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- (5 punten)

Opgave 2. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

ab

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{axb}{x} \qquad (R2) \quad \frac{ax \quad yb}{axyb}$$

- (a) Geef alle strings die je in ten hoogste drie stappen kunt afleiden.
- NB: Het axioma telt als één stap.
- (5 punten)
- (b) Is de string $ababa$ afleidbaar? Zo ja, geef een afleiding. Zo nee, bewijs dat de string niet afleidbaar is.
- (5 punten)
- (c) (i) Bewijs dat alle strings van de vorm $(ab)^n$ met $n \in \mathbb{N}$ afleidbaar zijn.
- (3 punten)
- (ii) Welke strings zijn nog meer afleidbaar?
- (2 punten)

Opgave 3. Deze opgave gaat over reguliere talen.

- (a) Geef een reguliere expressie voor de taal bestaande uit alle strings over $\{0, 1\}$ waarvan het tweede symbool een 0 is en het één-na-laatste symbool een 1.
(5 punten)
- (b) Geef een DEA voor de taal die bestaat uit alle niet-lege strings over $\{0, 1\}$ waarvan het eerste en het laatste symbool hetzelfde zijn.
(5 punten)
- (c) Bewijs dat de taal bestaande uit alle strings over $\{0, 1\}$ waarin twee keer zoveel 0en als 1en zitten niet regulier is.
(5 punten)

Opgave 4. Deze opgave gaat over Turing Machines.

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm $0^k 1^{2l}$ herkent, met $k, l \in \mathbb{N}$.

We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over $\{0, 1\}$ bevat (en verder alleen blanco symbolen $-$), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.

(7 punten)

- (b) Gegeven is de Turing Machine met de volgende transitietabel:

q_0	0	0	R	q_1
q_0	1	1	R	q_2
q_1	0	0	R	q_0
q_2	-	-	L	accept

- (i) Geef een string dit geaccepteerd wordt door T en een string die niet geaccepteerd wordt door T .
(4 punten)
- (ii) Welke strings worden in het algemeen door T geaccepteerd?
(4 punten)

Opgave 5. We werken in deze opgave in PA (dus zonder communicatie) met de atomaire acties a en b . Is de volgende vergelijking geldig? Zo ja, geef een berekening; zo nee, toon aan dat de bijbehorende procesgrafen niet bisimilaar zijn.

$$ab \parallel a = a(a \parallel b)$$

(6 punten)

Opgave 6. We werken met de verzameling acties $A = \{a, a', e, b, c\}$. De communicatiefunctie γ is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = e$. Verder definiëren we $H = \{a, a'\}$.

- (a) Teken de procesgraaf van $ba \parallel a'c$, dwz. het cartesisch product van $G(ba)$ en $G(a'c)$ met toevoeging van de communicatiepijlen.
(4 punten)

- (b) Teken $\Delta_H(G(ba \parallel a'c))$.
(4 punten)

- (c) Reken met de axioma's van de procesalgebra (ACP) de term

$$\partial_H((a + b) \parallel a'c)$$

uit tot een term in BPA_δ en teken de procesgraaf $\Delta_H(G((a + b) \parallel a'c))$.
(6 punten)

Opgave 7.

- (a) Teken de procesgraaf van X gedefinieerd in de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} X &= aX + bY \\ Y &= bY + c \end{aligned}$$

(3 punten)

- (b) Teken nu de procesgraaf van Z gedefinieerd in de recursievergelijkingen:

$$\begin{aligned} Z &= aZ + bY \\ Y &= bY + c \end{aligned}$$

(3 punten)

- (c) Zijn de in (a) en (b) gevonden procesgrafen bisimilaire? Zo ja, geef een bisimulatie, zo nee, beredeneer waarom niet.

(4 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$