

tentamen formele structuren
29 juni 2004

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven.

Opgave 1.

- (a) Gegeven zijn drie functies $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ door:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x} \\g(x) &= |x - \frac{1}{2}| \\h(x) &= 0\end{aligned}$$

Geef voor alle drie de functies aan of ze injectief, surjectief, bijectief zijn. Motiveer elk negatief antwoord met een voorbeeld.

NB: $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$.

(6 punten)

- b. Gegeven zijn twee aftelbaar oneindige verzamelingen A en B waarvoor geldt $A \cap B = \emptyset$. Bewijs dat $A \cup B$ aftelbaar is.

(5 punten)

- c. Geef twee verschillende aftelbaar oneindige verzamelingen.

(2 punten)

- d. Geef twee verschillende overaftelbare verzamelingen.

(2 punten)

Opgave 2. Gegeven is het deductief systeem over het alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ met één axioma:

ab

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x \quad ay}{xy} \qquad (R2) \quad \frac{xbb}{x}$$

- a. Geef een afleiding van de string $abbbb$.

(5 punten)

- b. Laat zien dat de string $babbb$ niet afleidbaar is.

(5 punten)

- c. Is het systeem beslisbaar? Motiveer je antwoord.

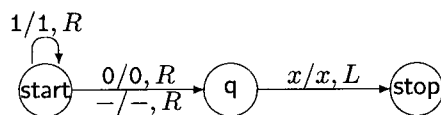
(5 punten)

Opgave 3.

- a. Teken een deterministische eindige automaat (DEA) die de taal herkent bestaande uit alle strings over $\{a, b, c\}$ waarin een b niet direct op een a volgt. (Dat betekent dat er geen substring ab voorkomt.)
(5 punten)
- b. Geef een reguliere expressie voor de taal bestaande uit alle strings over $\{a, b, c\}$ waarin ab wél als een substring voorkomt.
(5 punten)
- c. Bewijs, of weerleg door een tegenvoorbeeld: als L_1 en L_2 reguliere talen zijn over hetzelfde alfabet, dan is ook $L_1 \cup L_2$ regulier.
(5 punten)

Opgave 4. Deze opgave gaat over Turing Machines.

- a. Wat doet de Turing Machine gedefinieerd door de volgende transitiegraaf als de input een eindige string over $\{0, 1\}$ is?
(NB: De Turing Machine begint met het lezen van het meest linkse symbool. Met x/x wordt bedoeld dat x een willekeuring symbool is.)



- (6 punten)
- b. Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm $1^p 0^q$ herkent, met $p, q \in \{0, 1, 2, \dots\}$.
We gaan ervan uit dat de input tape een eindige string over $\{0, 1\}$ bevat (en verder alleen blanco symbolen $-$), en dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linkse symbool van de input string staat.
(9 punten)

Opgave 5. Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *zonder communicatie*.

- a. Werk de term $(a + bc) \parallel (d + e)$ uit tot basisprocessterm.
(5 punten)
- b. Bewijs dat de volgende gelijkheid *niet* geldt: $a(b + c) = ab + ac$.
(5 punten)
- c. Los op als procesgraaf (Y is het hulpproces):

$$\begin{aligned} X &= aYY \\ Y &= bX + c \end{aligned}$$

(5 punten)

Opgave 6. Deze opgave gaat over procesalgebra met merge *met communicatie*.

- a. Werk δ zoveel mogelijk weg uit de processterm $p = \delta(a + b) + a(\delta + b)c + ab\delta$.
Teken ook het δ -schone overblijfsel van $G(p)$ (dat is $\Delta(G(p))$).
(5 punten)
- b. We werken met de verzameling acties $A = \{a, a', a'', b, c, d\}$.
De communicatiefunctie γ is gedefinieerd als $\gamma(a, a') = a''$.
Teken de procesgraaf van $ab \parallel ca'd$, dwz. het cartesisch product van $G(ab)$ en $G(ca'd)$ met toevoeging van de communicatiepijlen.
(NB: Er wordt *niet* gevraagd om de term $ab \parallel ca'd$ uit te werken met de axioma's van de procesalgebra.)
(5 punten)
- c. Dit is een vervolg op vraag 6b;
we hebben nu bovendien gegeven $H = \{a, a'\}$.
Teken $\Delta_H(G(ab \parallel ca'd))$.
(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.

De axioma's van de procesalgebra

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- (A3) $x + x = x$
- (A4) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- (A5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

- (A6) $x + \delta = x$
- (A7) $\delta \cdot x = \delta$

- (CF1) $a \mid b = \gamma(a, b)$ als $\gamma(a, b)$ gedefinieerd
- (CF2) $a \mid b = \delta$ als $\gamma(a, b)$ niet gedefinieerd

- (CM1) $x \parallel y = x \parallel y + y \parallel x + x \mid y$
- (CM2) $a \parallel y = a \cdot y$
- (CM3) $(a \cdot x) \parallel y = a \cdot (x \parallel y)$
- (CM4) $(x + y) \parallel z = x \parallel z + y \parallel z$
- (CM5) $(a \cdot x) \mid b = (a \mid b) \cdot x$
- (CM6) $a \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot y$
- (CM7) $(a \cdot x) \mid (b \cdot y) = (a \mid b) \cdot (x \parallel y)$
- (CM8) $(x + y) \mid z = x \mid z + y \mid z$
- (CM9) $x \mid (y + z) = x \mid y + x \mid z$

- (D1) $\partial_H(a) = a$ als $a \notin H$
- (D2) $\partial_H(a) = \delta$ als $a \in H$
- (D3) $\partial_H(x + y) = \partial_H(x) + \partial_H(y)$
- (D4) $\partial_H(x \cdot y) = \partial_H(x) \cdot \partial_H(y)$