



tentamen formele structuren
15 augustus 2003

Opgave 1.

(a) Gegeven zijn drie functies:

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow [-1, 1] && \text{met voorschrift } x \mapsto x^2 \\ g : [-2, 2] &\rightarrow [0, 2] && \text{met voorschrift } x \mapsto |x| \\ h : [-3, 3] &\rightarrow [-4, 4] && \text{met voorschrift } x \mapsto x \end{aligned}$$

Geef voor elke van deze functies aan of hij injectief en/of surjectief is. Geef voor elk van de gevallen waarin het antwoord negatief is een tegenvoorbeeld waaruit dat blijkt.

(9 punten)

(b) Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar (het antwoord alleen volstaat):

- (i) De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van de rationale getallen.
- (ii) De verzameling van alle functies van $\{0, 1\}$ naar de natuurlijke getallen.
- (iii) De verzameling van alle reële getallen.
- (iv) De verzameling van alle irrationale getallen (dus alle reële getallen die niet rationaal zijn).

(6 punten)

Opgave 2. Gegeven is een deductief systeem over het alfabet $\{0, 1\}$ met één axioma:

$$101$$

en twee afleidingsregels:

$$(R1) \quad \frac{x \quad y}{1x1y1} \qquad (R2) \quad \frac{x111y}{xy}$$

(a) Geef alle strings die je in ten hoogste 3 stappen kunt afleiden.

(NB: het opschrijven van het axioma telt als één stap.)

(5 punten)

(b) Geef een afleiding van de string 110100111.

(5 punten)

(c) Waarom is de string 010 niet afleidbaar?

Hint: gebruik *niet* de invariant-methode, maar kijk naar de strings die je in (a) hebt afgeleid.

(5 punten)

Opgave 3.

- (a) Geef een DEA voor de taal over $\{0, 1\}$ die bestaat uit alle strings die de string 101 als substring bevatten.
(5 punten)
- (b) Beschrijf de taal uit onderdeel (a) ook door een reguliere expressie.
(5 punten)
- (c) Gegeven zijn twee talen L_1 en L_2 over een alfabet S . We definiëren een nieuwe taal L_3 over S door $L_3 = L_1 \cup L_2$. Bewijs, of weerleg door een tegenvoorbeeld:

Als L_1 en L_2 regulier zijn dan is ook L_3 regulier.

(5 punten)

Opgave 4.

- (a) Geef de transitietabel van een Turing Machine die precies de strings van de vorm $0^n 10^n$ (met $n > 0$) herkent.
(7 punten)
- (b) Beschouw de Turing Machine T met tabel

q_0	1	1	R	q_0
q_0	0	1	L	q_1
q_1	1	1	L	q_1
q_1	—	—	R	q_2
q_2	1	—	R	q_0

Bij het begin van de berekening leest T het meest linkse symbool van een string 0-en en 1-en.

- (i) Als T begint met de inputstring 111, welke string staat er dan op de band na terminatie? (Die string is de output.)
- (ii) Wat is de output als T begint met de inputstring 00 ?
- (iii) Wat is de output als T begint met de inputstring 110101 ?
- (iv) Beschrijf in het algemeen wat T voor output geeft bij een willekeurige inputstring.

(8 punten)

Opgave 5.

- (a) Werk de procesterm $(a(b+c)) \parallel a$ uit tot een basisterm (dus zonder $\parallel$ en zonder $\vdash$). Maak hierbij gebruik van de axioma's onderaan de pagina.
(4 punten)

- (b) De processen X en Y zijn recursief gedefinieerd door

$$\begin{aligned} X &= a + aX + aY \\ Y &= b + bY \end{aligned}$$

- (i) Teken de procesgraaf van X .
(ii) Geef drie verschillende eindige traces van X .
(iii) Geef drie verschillende oneindige traces van X .

(6 punten)

- (c) Hier zijn c en c^* 'halve' acties met communicatie $c|c^* = c^*|c = \underline{c}$.
Gegeven zijn de recursieve processen

$$\begin{aligned} X &= c^* \cdot a \cdot X \\ Y &= b \cdot c \end{aligned}$$

Geef van het proces $\partial(X \parallel Y)$ het oneindige deadlockvrije trace.

(5 punten)

De axioma's van procesalgebra

$$\begin{aligned} x + y &= y + x \\ x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + x &= x \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \parallel y &= x \vdash y + y \vdash x \\ a \vdash y &= a \cdot y \\ (a \cdot x) \vdash y &= a \cdot (x \parallel y) \\ (x + x') \vdash y &= x \vdash y + x' \vdash y \end{aligned}$$

Opgave 6.

- (a) Bekijk het termherschrijfsysteem gedefinieerd door de volgende regels:

$$\begin{array}{lcl} a & \rightarrow & b \\ a & \rightarrow & c \\ b & \rightarrow & b \\ c & \rightarrow & c \end{array}$$

Is dit termherschrijfsysteem confluent? Waarom (niet)?

Heeft dit termherschrijfsysteem de eigenschap unieke normaalvormen (UN)?

Waarom (niet)?

(5 punten)

- (b) Bekijk het termherschrijfsysteem gedefinieerd door de volgende regels:

$$\begin{array}{lcl} \text{not}(\text{true}) & \rightarrow & \text{false} \\ \text{not}(\text{not}(x)) & \rightarrow & x \end{array}$$

Laat zien (door een voorbeeld te geven) dat dit termherschrijfsysteem niet confluent is.

(5 punten)

- (c) Eindige lijsten worden geconstrueerd met de symbolen `nil` voor de lege lijst en `cons` voor het toevoegen van een element aan een lijst. Bijvoorbeeld de term `cons(0, nil)` representeert de lijst met één element, namelijk 0.

De functie `sum` neemt als input een eindige lijst van natuurlijke getallen, en geeft als output 0 als de lijst leeg is, en anders de som van alle elementen van de lijst.

Breid het (bekende) termherschrijfsysteem voor optellen

$$\begin{array}{lcl} A(x, 0) & \rightarrow & x \\ A(x, S(y)) & \rightarrow & S(A(x, y)) \end{array}$$

uit met herschrijfgeregels voor `sum`.

(5 punten)

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.