

tentamen formele structuren
17 augustus 2001

Opgave 1.

- (a) Bewijs dat de som van een rationaal en een irrationaal getal irrationaal is.
(3 punten)
- (b) Geef een injectie van de verzameling $\mathbb{Q}$ in de verzameling $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (Hint: gebruik (a).)
(6 punten)
- (c) Kun je ook een injectie van $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{Q}$ maken? Zo ja, doe dat, zo nee, geef aan waarom het niet kan.
(6 punten)

Opgave 2. Gegeven is een deductief systeem D met één axioma, namelijk

111

en twee regels, namelijk

$$\frac{x}{xx}$$

en

$$\frac{xxx}{x}$$

- (a) Geef alle strings die met maximaal 3 stappen kunnen worden afgeleid.
(Het axioma geldt al als één stap.)
(4 punten)
- (b) Is de string 11111 (vijf 1-en) afleidbaar? Motiveer uw antwoord.
(4 punten)
- (c) Geef een alternatief deductief systeem D' met twee axioma's en één regel dat precies dezelfde strings afleidt.
(4 punten)
- (d) Is het systeem D beslisbaar? Motiveer uw antwoord.
(3 punten)

Opgave 3.

- (a) Construeer een eindige automaat voor de taal bestaande uit alle strings over $\{0, 1\}$ waarvan het verschil tussen het aantal 1-en en het aantal 0-en deelbaar is door 3 (let op: ook 0 is deelbaar door 3).

(7 punten)

- (b) Geef voor elk van de volgende talen aan of die kan worden herkend door een DEA. Alleen het antwoord volstaat.

(i) $\{0^n 1^m \mid n \neq m\}$,

(ii) $1(00)(10)^*$,

(iii) $\{1^n \mid n \text{ is een macht van } 2\}$,

- (iv) De verzameling van alle strings over $\{0, 1\}$ die 1100 als substring bevatten.

(8 punten)

Opgave 4.

- (a) Op de inputtape van een Turing Machine staat één string over het alfabet $\{0, 1\}$. We gaan ervan uit dat de kop van de Turing Machine aan het begin bij het meest linker symbool van deze string staat. Voor de rest staan er alleen blanco symbolen ($-$).

Geef de transitietabel van de Turing Machine die precies de strings van de vorm $0(1^{2^n})0$ accepteert, met n een natuurlijk getal, dus $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

(5 punten)

- (b) Geef een voorbeeld van een taal die wel door een Turing Machine maar niet door een DEA herkend kan worden.

(5 punten)

- (c) Bestaan er algoritmes die niet door een Turing Machine gemodelleerd kunnen worden? Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, leg uit waarom niet.

(5 punten)

Opgave 5. (De axioma's van procesalgebra zijn gegeven als bijlage.)

- (a) Reken de procesterm $(a + c) \parallel (c \cdot d)$ uit tot basisprocesterm.
(5 punten)
- (b) Teken de procesgraaf van de basisprocesterm gevonden als antwoord op 5(a).
(5 punten)
- (c) Geef de specificatie van een proces X met het oneindige trace $aaa \dots$
(5 punten)

Opgave 6. Gegeven is de TRS

$$\begin{array}{ll} A(x, 0) & \rightarrow x \\ A(x, S(y)) & \rightarrow S(A(x, y)) \\ M(x, 0) & \rightarrow 0 \\ M(x, S(y)) & \rightarrow A(M(x, y), x) \end{array}$$

- (a) Geef alle redexen in de term $A(M(S(x), 0), S(S(0)))$.
(3 punten)
- (b) Reduceer de term $A(M(S(x), 0), S(S(0)))$ naar normaalvorm.
(3 punten)
- (c) Geef aan hoe je deze TRS kunt uitbreiden met een functiesymbool F dat de faculteitsfunctie uitrekent.
(4 punten)
- (d) Geef een TRS voor het symbool $odds$ (met één argument) zodat de term $odds(S(0))$ de oneindige stream van alle oneven natuurlijke getallen genereert.
(5 punten)

Bijlage: de axioma's van procesalgebra

$$\begin{aligned}x + y &= y + x \\x + (y + z) &= (x + y) + z \\x + x &= x \\(x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \parallel y &= x \mid y + y \mid x \\a \mid y &= a \cdot y \\(a \cdot x) \mid y &= a \cdot (x \mid y) \\(x + x') \mid y &= x \mid y + x' \mid y\end{aligned}$$

Het tentamencijfer is (het totaal aantal punten plus 10) gedeeld door 10.