

Tentamen Inleiding Grafentheorie 28-8-2007

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 *Drie puzzels.*

Soms is het mogelijk uit een aantal eigenschappen van een graaf deze graaf te construeren. Bij deze puzzels kan op isomorfie na precies één graaf worden gemaakt, die aan de gevraagde eigenschappen voldoet. Geef steeds een incidentiële lijst van de graaf die aan de eisen voldoet. Label daarbij de punten van de graaf met hoofdletters.

aanwijzing: Begin steeds met een punt van hoogste graad bij het oplossen van de puzzels en het maken van schetsen.

- a) Zoek een graaf met de punten A, B, C, D, E, F, G met de graden $d(A)=5, d(B)=5, d(C)=4, d(D)=3, d(E)=3, d(F)=1, d(G)=1$, en geef de incidentiële lijst.
- b) Zoek een *tweedelingsgraaf* met de punten H, I, J, K, L, M, N, P met de graden $d(H)=5, d(I)=4, d(J)=4, d(K)=3, d(L)=3, d(M)=3, d(N)=2, d(P)=2$, en geef een incidentiële lijst.
- c) Zoek een *tweedelingsgraaf* met 10 punten $Q-Z$ met de graden $7, 6, 5, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2$ en geef de incidentiële lijst.

2 *Het teleprinter probleem of de De Bruijn rijen.*

Het is de bedoeling om alle strings ter lengte 4 over het alfabet $\{0,1\}$ in een cirkeltje te plaatsen, en wel zo, dat elke string in dat cirkeltje precies één keer voor komt.

- a) Als je met behulp van een Euler ronde zo'n cirkelstring wil genereren, hoe moet je dan de punten van de graaf nummeren, en hoe moet je de lijnen nummeren? Hoeveel punten heeft die graaf, hoeveel lijnen? En hoeveel symbolen zitten er in de kring?
- b) Geef een tekening van de graaf waarmee je dit teleprinter probleem kunt oplossen. (Graag vrij groot, en zet nummers bij punten en lijnen, zodat de oplossing te controleren is.)
- c) Maak een cirkelvormige string die een oplossing is voor dit teleprinter probleem.

3 *Hamilton cyclen.*

- a) Geef een tekening van de grafen van de vijf "Platonische" regelmatige veelvlakken, en geef in elk van deze veelvlakken een **Hamilton cykel** aan.

N.B. De platonische veelvlakken zijn: Tetraëder, Kubus, Octaëder, Dodecaëder en Icosaëder.

- b) Teken de **Petersen graaf**, (d.i. een graaf met 10 punten, 15 lijnen en de kortste cykel ter lengte 5).

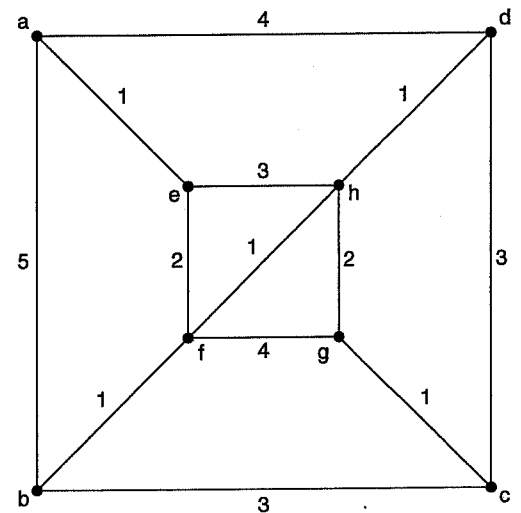
- c) Toon aan dat deze Petersen graaf geen **Hamilton cykel** bevat.

Aanwijzing: In de gebruikelijke figuur zit een buitenring en een binnenring. Bedenk dat bij een Hamilton cykel zoveel lijnen moeten worden weggelaten dat elk punt graad 2 krijgt, en dat het aantal keren dat in de overgebleven figuur een lijn tussen de binnenring en de buitenring loopt even moet zijn.

4 *Opspannende bomen en algoritmen.*

Gegeven een samenhangende graaf, met op de lijnen een gewichtsfunctie met als waardengebied de positieve reële getallen, en waarbij de gewichten op alle lijnen verschillend zijn. Wij vergelijken het algoritme van **Dijkstra** voor de kortste paden boom met het algoritme van **Prim** voor de minimale opspannende boom.

- a) Geef een korte beschrijving van het algoritme van **Prim**.
- b) Geef een korte beschrijving van het algoritme van **Dijkstra**.
- c) Behandel de graaf uit de tekening hiernaast met de algoritme van **Prim**, uitgaande van het punt **a**. Geef in een tabelvorm per punt: (i) Het punt in volgorde van toevoeging, (ii) de lijn die dit punt met het voorgaande verbindt (iii) het gewicht van de toegevoegde lijn. (iv) de waarde van de partiele boom. Geef na de tabel het totaalgewicht van de opspannende boom.



- d) Behandel de graaf uit de tekening hiernaast met de algoritme van **Dijkstra**, uitgaande van het punt **a**. Geef in een tabelvorm per punt: (i) Het punt in volgorde van definitieve waardetoekenning, (ii) de lijn die dit punt met het voorgaande verbindt (iii) het gewicht van de toegevoegde lijn. (iv) de waarde van dit punt. Geef na de tabel het totaalgewicht van de opspannende boom.

N.B. De delen c) en d) worden beoordeeld op de correctheid van de volgorde met betrekking tot de gevraagde algoritmen.

NORMERING

1a 2 pt	2a 2 pt	3a 4 pt	4a 2 pt	4d 3 pt
1b 3 pt	2b 4 pt	3b 2 pt	4b 2 pt	
1c 3 pt	2c 2 pt	3c 4 pt	4c 3 pt	

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

28-8-2007

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

- 5 Een graaf $G=(V,E)$ is een tweedelingsgraaf (bipartiete graaf) als
- ☐ G precies twee componenten heeft.
 - ☐ G het komplement is van een samenhangende graaf.
 - ☐ E bestaat uit twee disjunkte deelverzamelingen E_1, E_2 , zo dat een lijn uit E_1 en uit E_2 nooit een uiteinde gemeen hebben.
 - ☐ G geen oneven cykels bevat.
 - ☐ G geen even cykels bevat.
- 6 Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf waar
- ☐ tussen elk tweetal punten een ongericht pad bestaat.
 - ☐ tussen elk tweetal punten een gericht pad bestaat.
 - ☐ tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
 - ☐ tussen elk tweetal punten ten hoogste één pijl voorkomt.
 - ☐ aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").
- 7 Een k -reguliere graaf is
- ☐ een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht k krijgt.
 - ☐ een volledige graaf met k elementen.
 - ☐ een graaf waarin elk punt van graad k is.
 - ☐ een gerichte graaf waarin elk punt in- en uitgraad k heeft.
 - ☐ een graaf met k even grote componenten.
- 8 Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf
- ☐ een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een Euler toer te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.

Z.O.Z.

- 9 Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G=(V,E)$ is
- ☐ een samenhangende deelgraaf van G zonder cyclen.
 - ☐ een boom met dezelfde vertices als G .
 - ☐ een deelgraaf die een boom is, en bij weglaten G onsamenvastend maakt.
 - ☐ een maximale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
- 10 Met de Dijkstra algoritme construeert men
- ☐ een maximale stroom in een netwerk.
 - ☐ een minimale toewijzing in een gewogen graaf.
 - ☐ een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.
 - ☐ een minimale padenboom in een gewogen graaf.
- 11 De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- ☐ bij een maximumstroom er door elke snede tussen bron en put evenveel stroom gaat.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
 - ☐ bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
 - ☐ bij een maximumstroom, de instroom van elk punt (behalve bron en put) gelijk is aan de uitstroom van dat punt.
 - ☐ bij iedere stroom een onverzadigd (ongericht) pad van bron naar put bestaat.
- 12 Een koppeling in een graaf $G=(V,E)$ is gedefinieerd als
- ☐ een verzameling F van extra lijnen zo dat alle componenten van G onderling verbonden worden ("gekoppeld") door lijnen uit F .
 - ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zo dat geen vergrotend F -wisselpad bestaat in G .
 - ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zodat geen twee lijnen uit F een uiteinde gemeen hebben.
 - ☐ een maximale samenhangende deelgraaf van G .
- 13 De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G=(V_1,V_2,E)$ zegt dat een toewijzing van V_1 naar V_2 bestaat enkel en alleen als
- ☐ G regulier is (d.w.z., de graad is in elk punt dezelfde).
 - ☐ $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
 - ☐ $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
 - ☐ $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .
 - ☐ $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_2 .
 - ☐ de graad van elk punt uit V_1 tenminste $|V_2|/2$ is.