

400035

Tentamen Inleiding Grafentheorie

3-6-2005

Volledig tentamen met multiple choice gedeelte

In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.

1 Tweedelingsgrafen en cyclen.

- a) Wat betekent het als twee grafen **isomorf** zijn? Geef de definitie. Wat betekent het als een graaf **regulier** van graad d is? Geef de definitie. Geef ook de definitie van een **tweedelingsgraaf** (*bipartite graaf*).
- b) Gegeven een graaf, waarvoor de graad van elk punt groter of gelijk is aan een getal $k > 2$. Dan bevat deze graaf een cykel met lengte ten minste $k + 1$. Geef aan hoe U zo'n cykel zou kunnen vinden.
- c) Geef een *duidelijke gestructureerde* tekening van alle **samenhangende onderling niet isomorfe reguliere tweedelingsgrafen** op 8 punten.
- d) Geef de **verbindings matix** van elk van de in het vorige onderdeel gevonden **samenhangende onderling niet isomorfe reguliere tweedelingsgrafen**. (Zorg dat de labels van de punten systematisch gekozen worden).

2 Gerichte grafen en bruggen.

- a) Op welke manier kan het totale aantal incidenties in een **gerichte** graaf worden bepaald uit de **verbindingsmatrix** van die graaf?
- b) Welke verschillende vormen van samenhang kent U in het geval van een **ongerichte** en in het geval van een **gerichte** graaf? Geef alle definities.
- c) Probeer een definitie te vinden voor een **brug** in een gerichte graaf, die bruikbaar is in het algoritme van *Fleury* als dit wordt aangepast voor gerichte grafen.

Z.O.Z

3 *Bomen en grafen zonder circuits.*

- Wanneer heet een graaf een *boom*? Geef de definitie.
- In een boom bestaat een formule die het verband aan geeft tussen het aantal punten $|V|$ en het aantal lijnen $|E|$. Geef deze formule, en bewijs hem.
- Als in een samenhangende graaf elke lijn een *brug* is, dan is deze graaf een boom. Bewijs dit.

4 *Vergrotende wisselpaden en maximum koppelingen.*

- Geef de definitie van een F – vergrotend wisselpad in een graaf G met koppeling F .
- Geef de stelling van Berge over maximumkoppelingen en F – vergrotende wisselketens.
- Neem de tweedelingsgraaf G met $V_1 = \{1, \dots, 6\}$ en $V_2 = \{a, \dots, f\}$ en met de hiernaast gegeven verbindings matrix. Gebruik de “Hongaarse methode” om, uitgaande van de volgende koppeling F , een maximum koppeling in G te vinden:
 $F = \{1-a, 4-b, 5-c\}$.
- De gevonden maximum koppeling in c) is niet volledig. Volgens een bekende stelling dient er dus een deelverzameling W van V_1 te zijn, zo dat $|B(W)| < |W|$. Geef zo’n verzameling W , uitgaande van de berekeningen in onderdeel c).

$-$	a	b	c	d	e	f
1	1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	0	0	1
3	1	0	0	0	1	0
4	0	1	1	0	0	0
5	0	1	1	1	0	0
6	1	0	0	0	1	0

NORMERING

1a 1 pt	1d 3 pt	2c 3 pt	3c 3 pt	4c 3 pt
1b 3 pt	2a 2 pt	3a 2 pt	4a 2 pt	4d 3 pt
1c 3 pt	2b 3 pt	3b 3 pt	4b 2 pt	

Multiple Choice: 1 punt per vraag

$$CIJFER = \frac{SOM}{5} + 1.$$

Naam:

Studierichting en jaar:

3-6-2005

Dit blad moet in het tentamen formulier worden ingeleverd.

In dit multiple-choice gedeelte is er per vraag precies één alternatief juist én volledig.

- 5 Een k -reguliere graaf is
- ☐ een graaf waarin elk punt dezelfde graad heeft.
 - ☐ een gewogen graaf waarbij elke lijn het gewicht k krijgt.
 - ☐ een graaf met k even grote componenten.
 - ☐ een graaf waarin elk punt van graad k is.
 - ☐ een gerichte graaf waarin elk punt in- en uitgraad k heeft.
- 6 Het Handelsreizigersprobleem is het probleem om in een gewogen graaf
- ☐ een Hamilton-cykel te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een pad van minimaal gewicht te vinden tussen twee punten.
 - ☐ een Euler toer te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een volledige toewijzing te vinden van minimaal gewicht.
 - ☐ een rondwandeling te vinden van minimaal gewicht.
- 7 De stelling van Ford & Fulkerson stelt dat in een netwerk met bron en put
- ☐ bij iedere stroom een onverzadigd (ongericht) pad van bron naar put bestaat.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een snede.
 - ☐ bij een maximumstroom, de stroom door een pijl gelijk is aan de capaciteit van die pijl.
 - ☐ de stroomsterkte van een maximumstroom gelijk is aan de minimum capaciteit van een pijl.
 - ☐ een maximumstroom in geen enkele pijl de opgegeven capaciteit overtreft.
- 8 Een koppeling in een graaf $G=(V,E)$ is gedefinieerd als
- ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zodat geen twee lijnen uit F een uiteinde gemeen hebben.
 - ☐ een maximale samenhangende deelgraaf van G .
 - ☐ een deelverzameling F van lijnen in E zo dat geen vergrotend F -wisselpad bestaat in G .
 - ☐ een verzameling F van extra lijnen zo dat alle componenten van G onderling verbonden worden ("gekoppeld") door lijnen uit F .

Z.O.Z.

- 9 Zij $G=(V,E)$ een graaf. Een Hamilton cykel in G is gedefinieerd als
- ☐ een gesloten wandeling die elk punt uit V ten hoogste één keer aandoet.
 - ☐ een gesloten wandeling die elke lijn van E ten hoogste één keer aandoet.
 - ☐ een cykel die door alle punten van V gaat.
 - ☐ een wandeling die elke lijn van E precies één keer aandoet.
- 10 Een toernooi is gedefinieerd als een gerichte graaf waar
- ☐ tussen elk tweetal punten een gericht pad bestaat.
 - ☐ tussen elk tweetal punten een ongericht pad bestaat.
 - ☐ een gerichte Hamilton cykel mogelijk is.
 - ☐ aan elke pijl een gewicht is toegekend (de "score").
 - ☐ tussen elk tweetal punten precies één pijl voorkomt.
- 11 Een opspannende boom in een samenhangende graaf $G=(V,E)$ is
- ☐ een minimale, samenhangende, opspannende deelgraaf.
 - ☐ een boom met dezelfde vertices als G .
 - ☐ een samenhangende deelgraaf van G zonder cykels.
 - ☐ een deelgraaf van G met vertex verzameling V en die geen cykels heeft.
- 12 De stelling van Hall over toewijzingen in een tweedelingsgraaf $G=(V_1,V_2,E)$ zegt dat een toewijzing van V sub 1 in V sub 2 bestaat enkel en alleen als
- ☐ $|V_1| \leq |V_2|$.
 - ☐ G regulier is (d.w.z., de graad is in elk punt dezelfde).
 - ☐ $|B(W)| \geq |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
 - ☐ $|B(W)| < |W|$ voor elke deelverzameling W van V_1 .
 - ☐ de graad van elk punt uit V_1 tenminste $|V_2|/2$ is .
- 13 Met de Dijkstra algoritme construeert men
- ☐ een minimale rondwandeling in een afstandsgraaf.
 - ☐ een minimale padenboom in een gewogen graaf.
 - ☐ een maximale stroom in een netwerk.
 - ☐ een minimale toewijzing in een gewogen graaf.