

## Tweede deeltentamen Inleiding Grafentheorie 17-5-2005

*In dit tentamen gebruiken wij tenzij anders gemeld uitsluitend grafen zonder lussen of parallelle lijnen, met dien verstande, dat in een gerichte graaf antiparallelle lijnen zijn toegestaan. Bovendien gebruiken we uitsluitend verbindings matrices met nullen op de hoofd diagonaal.*

### 1 *Bomen en eenvoudige koolwaterstoffen.*

- a) Er bestaat een formule die het verband aan geeft tussen het aantal lijnen  $e$  van een graaf, en de graden van de punten  $\{d(v)\}_{v \in V}$ . Geef deze formule.
- b) Gegeven is, dat een boom uitsluitend punten heeft van graad 1 of van graad 4. Geef dan het aantal punten  $n$  van de boom als functie van het aantal punten  $m$  van graad 4.  
(Aanwijzing: Teken eerst de gevallen met  $m=0$ ,  $m=1$ ,  $m=2$  en stel dan de formule op. Toon dan aan dat de formule juist is door aan te geven wat er gebeurt als  $m$  met 1 toeneemt).
- c) Geef een tekening van alle verschillende bomen van dit type met precies 5 punten van graad 4.  
(Aanwijzing: Als in een boom met meer dan twee punten alle punten van graad 1 worden weggelaten houdt men nog steeds een boom over. Als je dit aan toont kun je het bij b) en c) gebruiken).

### 2 *Gray codes en Hamilton cykels op kubus grafen.*

In deze opgave bekijken we steeds strings van vaste lengte over het alfabet  $\{0,1\}$ . Deze strings worden gezien als de punten van een (*hyper*)*kubusgraaf*. Een tweetal punten in deze kubusgrafen is verbonden dan en alleen dan als de bijbehorende strings op precies één plaats verschillen.

- a) Er bestaat een Hamilton cykel in de kubus graaf op de strings ter lengte 3 over  $\{0,1\}$ . Geef zo'n Hamilton cykel aan.
- b) Uitgaande van deze kubusgraaf kunnen wij ook op de hyperkubusgraaf met als punten alle strings ter lengte 4 ook een Hamilton circuit construeren. Geef dit circuit en beschrijf de constructie.

- c) Voor ieder natuurlijk getal  $n \geq 2$  bestaat er op de op de hyperkubusgraaf, waarvan de punten genummerd zijn met strings ter lengte  $n$  een Hamilton cykel. Toon dit aan.

**3 Een algorithmen voor het handelsreizigers probleem.**

- a) Welke drie eigenschappen definiëren een *metriek*? Wat bedoelt U in dat verband met de *driehoeks ongelijkheid*? Aan welke eisen moet een *afstandenmatrix* voldoen?
- b) Geef de definitie van het *handelsreizigers probleem*.
- c) In het dictaat staat een benaderend algorithmen van het handelsreizigers probleem. Geef dit algorithmen.
- d) Rechts is gegeven een gewichtsmatrix van de volledige graaf  $K_5$ . Pas eerst de matrix aan tot het een echte afstandenmatrix is, en teken de bijbehorende afstandsgraaf met getallen bij de lijnen. Ga uit van de afstandenmatrix en van de cykel A B C D E A. Ga daarna met het algorithmen uit c) zoeken naar een verbetering van de cykel. Wat vind U als gewicht van de beste cykel die zo via enkele stappen van het algoritme bereikt wordt?

|   | A  | B | C | D | E  |
|---|----|---|---|---|----|
| A | 0  | 7 | 6 | 8 | 10 |
| B | 7  | 0 | 9 | 6 | 5  |
| C | 6  | 9 | 0 | 5 | 9  |
| D | 8  | 6 | 5 | 0 | 3  |
| E | 10 | 5 | 9 | 3 | 0  |

**NORMERING**

|         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|
| 1a 3 pt | 2a 2 pt | 3a 2 pt | 3d 3 pt |
| 1b 3 pt | 2b 3 pt | 3b 2 pt |         |
| 1c 4 pt | 2c 4 pt | 3c 4 pt |         |

**CIJFER**

|                    |                 |                    |                 |                  |
|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|------------------|
| Bij 0,1,2,3 pt : 1 | 4,5,6 pt : 2    | 7,8,9 pt : 3       | 10,11,12 pt : 4 | 13,14,15 pt : 5, |
| 16,17,18 pt : 6    | 19,20,21 pt : 7 | 22,23,24,25 pt : 8 | 26,27,28 pt : 9 | 29,30 pt : 10.   |